6　フェルマーの原理

6.1　問題

幾何光学においては媒質中の光線の経路はフェルマーの原理から決定できる。重力レンズの場合も同様である。そのためには、一般相対論の文脈におけるフェルマーの原理を定式化しておく必要がある。ここではそのなかでもっとも簡単な場合である

静的時空におけるフェルマーの原理

時空:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

が、静的、すなわち

$$g_{\mu\nu,0} = 0 \ (\text{時間に依存しない}) \ \text{かつ} \ g_{0i} = 0 \ (\text{時間反転に対して不変}) \tag{2}$$

を満たすとき、光線は 2 点 A、B を結ぶ経路の所要時間が最小となるように進む。

$$\delta(\Delta t_{\mathrm{AB}}) \equiv \delta \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} dt = 0 \tag{3}$$

を証明してみよう。

アファインパラメータを λ としたとき、一般に光の測地線は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{4}$$

で与えられる。静的時空の条件である (2) 式を用いて、(4) 式の λ を t で書き換えてみよう。

問 (6.1) まず、(4) 式の $\mu = 0$ 成分を変形すると

$$\frac{d^2 t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2} = -2\Gamma^0{}_{0i} \frac{dx^i}{dt} = -2g^{00}\Gamma_{00i} \frac{dx^i}{dt} = -2\frac{\Gamma_{00i}}{g_{00}} \frac{dx^i}{dt} \tag{5}$$

となることを示せ。

問 (6.2) (5) 式を (4) 式の $\mu = k$ 成分に代入して変形すると

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} - \frac{2}{g_{00}} \underbrace{\Gamma_{00i}}_{=g_{00,i}/2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \left(-\Gamma^k{}_{00} \frac{g_{ij}}{g_{00}} + \Gamma^k{}_{ij} \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{6}$$

が得られることを示せ。

問 (6.3) (6) 式を g_{lk} と縮約し、

$$\gamma_{ij} \equiv -\frac{g_{ij}}{g_{00}} \quad \Rightarrow \quad dt^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{7}$$

を定義すると

$$\gamma_{lk} \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}(\gamma_{li,j} + \gamma_{lj,i} - \gamma_{ij,l}) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{8}$$

となることを示せ。

問 (6.4) 以上の結果をまとめて上記のフェルマーの原理が成り立つことを示せ。