

5 ダークエネルギーの状態方程式とビッグリップ

ロバートソン・ウォーカー計量でのアインシュタイン方程式は、次の二つの独立な式に帰着する。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2)$$

ただし、 K は空間曲率、 ρ と p は宇宙の平均密度および圧力であり、宇宙定数 Λ は 0 であるとした。

問 (5.1) この 2 つの式から、次の関係式を導け。

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -p \frac{d(a^3)}{dt}. \quad (3)$$

問 (5.2) 式 (3) の物理的な意味を簡単に述べよ。

問 (5.3) 式 (2) から、 $\rho + 3p$ が正である限り、必ずある時刻 t_* において $\dot{a} = 0$ となることを、 $a(t)$ の傾きを考察し図を書いて説明せよ。

問 (5.4) その時刻 t_* を原点 ($t_* = 0$) に選んだ時の現在の宇宙の年齢 t_0 は $(a/\dot{a})_{t=t_0} \equiv 1/H_0$ よりも小さいことを示せ。

問 (5.5) $K = 0$ かつ状態方程式が $p = w\rho$ (ただし、 w は -1 でない定数) の場合、 $a(t) \propto t^\alpha$ という解が得られる。 $\alpha = \alpha(w)$ を具体的に求めよ。

問 (5.6) (5.5) において $w = -1$ の場合どうなるか別途考察せよ。

問 (5.7) $K = 0$ で、状態方程式が $p = w\rho$ (ただし、 w は定数) にしたがうダークエネルギーと非相対論的物質が存在する宇宙を考える。このときフリードマン方程式は

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_m}{a} + \frac{\Omega_{de}}{a^{(1+3w)}} \right], \quad (4)$$

となる。ここで H_0 はハッブル定数、 Ω_m と Ω_{de} は非相対論的物質とダークエネルギーの密度パラメータである。もしも $w < -1$ であれば、このモデルのスケール因子はある有限の時刻 $t = t_\infty$ で発散する。これをビッグリップと呼ぶ。 $\Omega_{de} \gg \Omega_m$ が成り立つと仮定して、現在からビッグリップまでに残された時間 $\Delta t \equiv t_\infty - t_0$ を計算せよ。