4　シュワルツシルドの内部解と外部解

時間に依存しない球対称時空の計量：

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{1}$$

に対するトールマン・オッペンハイマー・ボルコフ (TOV) 方程式は

$$-r^2 \frac{dp}{dr} = \frac{G(\rho + p)(m + 4\pi p r^3)}{1 - 2Gm/r} \tag{2}$$

である。この TOV 方程式の一様密度解：

$$\rho(r) = \rho_0 \tag{3}$$

を具体的に計算してみよう。

問 (4.1) (3) 式を状態方程式として、(2) 式を積分せよ。ただし積分定数はまだ決めなくてよい。また必要であれば、$\kappa_0 \equiv \sqrt{8\pi G\rho_0/3}$ とおいてよい。

問 (4.2) $r = R_\mathrm{s}$ で $p = 0$ となるようにして積分定数を決め、$r < R_\mathrm{s}$ での $p(r)$ の表式を求めよ。必要であれば κ_0 あるいは $M_\mathrm{s} \equiv 4\pi\rho_0 R_\mathrm{s}^3/3$ を用いて良い。

問 (4.3) (1) 式に対する計量は

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - 2Gm/r} \qquad e^{2\phi} = \exp\left[-\int_r^\infty \frac{2G(m + 4\pi p x^3)}{x^2 - 2Gmx} dx\right] \tag{4}$$

で与えられる。$r > R_\mathrm{s}$ では真空 ($p = 0$, $\rho = 0$) としてこれを具体的に計算することで、一様密度球に対する $r < R_\mathrm{s}$ での時空の計量 (シュワルツシルドの内部解) を求めよ。

問 (4.4) $r > R_\mathrm{s}$ での時空の計量 (シュワルツシルドの外部解) を求めよ。