3　球対称時空に対するアインシュタインテンソル

球対称時空:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}dr^2 + \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{1}$$

に対するクリストッフェル記号の 0 でない成分は以下の表の通りである。

表 1: 球対称計量に対するクリストッフェル記号

Γ	t	r	θ	φ
tt	$\dot\phi$	$\phi' e^{2\phi-2\lambda}$	0	0
tr	ϕ'	$\dot\lambda$	0	0
$t\theta$	0	0	$\dot\chi/\chi$	0
$t\varphi$	0	0	0	$\dot\chi/\chi$
rr	$\dot\lambda e^{2\lambda-2\phi}$	λ'	0	0
$r\theta$	0	0	χ'/χ	0
$r\varphi$	0	0	0	χ'/χ
$\theta\theta$	$\dot\chi\chi e^{-2\phi}$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}$	0	0
$\theta\varphi$	0	0	0	$\cot\theta$
$\varphi\varphi$	$\dot\chi\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta$	$-\sin\theta\cos\theta$	0

対応するアインシュタインテンソルを具体的に計算してみよう。ちなみに、必要な公式は

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\nu} \tag{2}$$

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\mu} \tag{3}$$

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} \tag{4}$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \tag{5}$$

である。

問 (3.1) リッチテンソル R_{tt} を求めよ。

問 (3.2) R_{tr} を求めよ。

問 (3.3) $R_{t\theta}$ を求めよ。

問 (3.4) $R_{t\varphi}$ を求めよ。

問 (3.5) R_{rr} を求めよ。

問 (3.6) $R_{r\theta}$ を求めよ。

問 (3.7) $R_{r\varphi}$ を求めよ。

問 (3.8) $R_{\theta\theta}$ を求めよ。

問 (3.9) $R_{\theta\varphi}$ を求めよ。

問 (3.10) $R_{\varphi\varphi}$ を求めよ。

問 (3.11) リッチスカラー R を求めよ。

問 (3.12) アインシュタインテンソル $G^{\alpha}{}_{\beta}$ を求めよ。