2　球対称時空に対するクリストッフェル記号

球対称時空の線素を

$$d\tau^2 = e^{2\phi(r,t)}dt^2 - e^{2\lambda(r,t)}dr^2 - \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{1}$$

と書く。この計量に対するアインシュタイン方程式を導くには、まずクリストッフェル記号を求め、それからリッチテンソル、さらにスカラー曲率を計算する必要がある。クリストッフェル記号は $g_{\mu\nu}$ から直接

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\Gamma_{\mu\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\frac{1}{2}\,\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right) \tag{2}$$

を用いて計算することもできるが、対称性の高い時空の場合、長々と計算した挙げ句ほとんどの成分が 0 になり虚しい思いをする。変分法を使うと計算を少しだけ効率的に行うことができる。

作用を

$$S = -\int I d\tau, \quad I \equiv e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\sin^2\theta\,\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \tag{3}$$

と書く。これを τ に関して変分した結果はオイラー・ラグランジュ方程式:

$$\frac{\partial I}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dx^\mu/d\tau)} \tag{4}$$

に帰着するので、$\mu = t,\, r,\, \theta,\, \varphi$ に対する 4 つの式が得られる[2]。その結果を測地線の式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{5}$$

と比較して、対応する項から $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を読み取れば良い。以下、t と r に対する微分をそれぞれ $\dot{}$ と $'$ で記すことにして、(4) 式を具体的に計算してみよう。

問 (2.1) (4) 式の $\mu = t$ 成分を書き下し、$\Gamma^{t}{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。

問 (2.2) (4) 式の $\mu = r$ 成分を書き下し、$\Gamma^{r}{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。

問 (2.3) (4) 式の $\mu = \theta$ 成分を書き下し、$\Gamma^{\theta}{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。

問 (2.4) (4) 式の $\mu = \varphi$ 成分を書き下し、$\Gamma^{\varphi}{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。

[2] あまり美しい記法とは言えないが、わかりやすさのために $\mu = 0$ の代わりに直接 t を添字にすることがある。$x^t = t$ や $x^\theta = \theta$ と書かれると違和感があるが、$\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}$ ならば $\Gamma^{2}{}_{33}$ よりも対応が明確であろう。