

1 GPS と一般相対論

GPS (Global Positioning System) は、カーナビや携帯電話に組み込まれ完全に日常生活の一部となっている。GPS 衛星は 24 基が高度 20,200km、軌道傾斜角 55 度、周期 12 時間の軌道にある。それ以外にも 7 基が別軌道にあり、遮るものがない限り地上のどこからでも同時に 6 基以上の衛星が視界に入る。

GPS 衛星からの信号には、衛星に搭載された原子時計からの時刻と衛星の軌道データが含まれている。仮に地上の GPS 受信機が正確な時計を搭載していれば、3 個の GPS 衛星からの信号を受け取り、その信号到達までの時間差からそれらまでの距離を決定すれば、GPS 受信機の位置座標が推定できる。実際には、GPS 受信機に搭載されている時計は、あまり正確ではないため 4 つの GPS 衛星からの信号を受信することで、GPS 受信機の時刻の較正をも同時に行う。

意外かも知れないが、このシステムでは一般相対論の効果を考慮する必要があることは良く知られている。以下、地球を原点としたシュワルツシルド計量：

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM_{\oplus}}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM_{\oplus}/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

を座標系を選んで計算してみよう。

問 (1.1) 地球の赤道上で静止している観測者を考える。地球を半径 r_{\oplus} 、角速度 w_{\oplus} で自転している一様球であると近似して、この観測者が測定する時間 dt_{\oplus} と座標時間 dt の関係式を書け。

問 (1.2) 地球の中心から r_{gps} だけ離れた軌道を角速度 w_{gps} で公転している GPS 衛星が測定する時間 dt_{gps} と dt_{\oplus} の比が

$$\frac{dt_{\oplus}}{dt_{\text{gps}}} \approx 1 + \frac{GM_{\oplus}}{r_{\text{gps}}} + \frac{r_{\text{gps}}^2 w_{\text{gps}}^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}} - \frac{r_{\oplus}^2 w_{\oplus}^2}{2} \quad (2)$$

と近似できることを示せ。

問 (1.3) (2) 式の右辺の各項を具体的に評価してみよう。まず、GPS 衛星の軌道が高度 20,200km、周期 12 時間であることを用いて、地球のシュワルツシルド半径と実際の半径との比 GM_{\oplus}/r_{\oplus} がおよそ 10^{-9} であることを確かめよ。必要であれば光速 $c = 30$ 万 km/s、および地球の円周が 4 万 km であることを使ってよい。

問 (1.4) 同様にして (2) 式の右辺の各項を評価して、 $dt_{\oplus}/dt_{\text{gps}} - 1$ がおよそ -10^{-10} であることを確かめよ。

問 (1.5) 原子時計は高精度のもので 10^{-15} s/s 程度の相対誤差が達成されている。一方、GPS 信号を受信する地上側がクォーツ時計を用いている場合、その相対誤差は 10^{-5} s/s 程度である。これらの数値と上述の設問から得られた一般相対論の効果を比較し、GPS で達成される地上での位置決定精度について考察せよ。