2008年度一般相対論中間試験

2008年5月20日(火) 10:15am – 11:45am 於 理学部1号館 233号室

以下の設問を適宜選択して解答せよ。全問回答する必要はなく、講義の最終成績に反映される点数は得点のうち60点を上限とする。日本語と英語のどちらで答えてもよいが、結果だけではなく、それを導いた過程が明確となるように記述せよ。手書き（自筆）のノートは持ち込んで参照して良い（自分のものであってもコピーは不可）。

[1] ブラックホールの密度

ブラックホールは途方もなく高密度で強重力であるというイメージがある。しかし実は必ずしもそうではない。以下、一様な質量密度 ρ をもつ半径 R、質量 M の球対称物体を考えてみよう。

問 (1.1) この物体の半径 R がそのシュワルツシルド半径と一致するという条件を課して、M と R を ρ で書き下せ。ニュートンの重力定数を G、光速を c とせよ。[5点]

問 (1.2) ρ として地球の大気密度を考えたときのブラックホールの質量と半径を求めよ。この大きさを太陽系のサイズ (約30天文単位 $\approx$ 45億km) と比べてみよ。ちなみに $G \approx 6.7 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3/\mathrm{g}/\mathrm{s}^2$、$c \approx 3 \times 10^{10}\mathrm{cm/s}$ として計算し、答えは桁があっていればよい。[5点]

問 (1.3) ρ として宇宙の平均密度 ($\approx 10^{-29}\mathrm{g/cc}$) を考えたときのブラックホールの質量と半径を求めよ。またこの大きさを宇宙年齢137億年に対応する観測可能な宇宙のサイズと比べてみよ。答えは桁があっていればよい。[5点]

問 (1.4) 以上の例から、ブラックホール内部での居住可能性について考えられることを述べよ。[10点]

[2] GPS と一般相対論

GPS (Global Positioning System) は、カーナビや携帯電話に組み込まれ完全に日常生活の一部となっている。GPS 衛星は 24 基が高度 20,200km、軌道傾斜角 55 度、周期 12 時間の軌道上にある。それ以外にも 7 基が別軌道上にあり、遮るものがない限り地上のどこからでも同時に 6 基以上の衛星が視界に入る。

GPS 衛星からの信号には、衛星に搭載された原子時計からの時刻と衛星の軌道データが含まれている。仮に地上の GPS 受信機が正確な時計を搭載していれば、3 個の GPS 衛星からの信号を受け取り、その信号到達までの時間差からそれらまでの距離を決定すれば、GPS 受信機の位置座標が推定できる。実際には、GPS 受信機に搭載されている時計は、あまり正確ではないため 4 つの GPS 衛星からの信号を受信することで、GPS 受信機の時刻の較正をも同時に行う。

以下、地球を原点としたシュワルツシルド計量:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM_\oplus}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM_\oplus/r} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{1}$$

を座標系に選んで、一般相対論の効果を計算してみよう。

問 (2.1) 地球の赤道上で静止している観測者を考える。地球を半径 $r_\oplus$, 角速度 $w_\oplus$ で自転している一様球であると近似して、この観測者が測定する時間 $dt_\oplus$ と座標時間 dt の関係式を書け。[5 点]

問 (2.2) 地球の中心から $r_{\rm gps}$ だけ離れた軌道を角速度 $w_{\rm gps}$ で公転している GPS 衛星が測定する時間 $dt_{\rm gps}$ と $dt_\oplus$ の比が

$$\frac{dt_\oplus}{dt_{\rm gps}} \approx 1 + \frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} + \frac{r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r_\oplus} - \frac{r_\oplus^2 w_\oplus^2}{2} \tag{2}$$

と近似できることを示せ。[5 点]

問 (2.3) (2) 式の右辺の各項を具体的に評価してみよう。まず、GPS 衛星の軌道が高度 20,200km、周期 12 時間であることを用いて、地球のシュワルツシルド半径と実際の半径との比 $GM_\oplus/r_\oplus$ がおよそ 10^{-9} であることを確かめよ。必要であれば光速度 $c = 30$ 万 km/s、および 地球の円周が 4 万 km であることを使ってよい。[5 点]

問 (2.4) 同様にして (2) 式の右辺の各項を評価して、$dt_\oplus/dt_{\rm gps} - 1$ がおよそ -10^{-10} であることを確かめよ。[10 点]

問 (2.5) 原子時計は高精度のもので 10^{-15}s/s 程度の相対誤差が達成されている。一方、GPS 信号を受信する地上側がクォーツ時計を用いている場合、その相対誤差は 10^{-5}s/s 程度である。これらの数値と上述の設問から得られた一般相対論的効果を比較し、GPS で達成される地上での位置決定精度について考察せよ。[10 点]

[3] 球対称時空に対するクリストッフェル記号

球対称時空の線素を

$$d\tau^2 = e^{2\phi(r,t)}dt^2 - e^{2\lambda(r,t)}dr^2 - \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{3}$$

と書く。この計量に対するアインシュタイン方程式を導くには、まずクリストッフェル記号を求め、それからリッチテンソル、さらにスカラー曲率を計算する必要がある。クリストッフェル記号は $g_{\mu\nu}$ から直接

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\Gamma_{\mu\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\frac{1}{2}\,\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right) \tag{4}$$

を用いて計算することもできるが、対称性の高い時空の場合、長々と計算した挙げ句ほとんどの成分が 0 になり虚しい思いをする。変分法を使うと計算を少しだけ効率的に行うことができる。

作用を

$$S = -\int I d\tau, \quad I \equiv e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\sin^2\theta\,\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \tag{5}$$

と書く。これを τ に関して変分した結果はオイラー・ラグランジュ方程式:

$$\frac{\partial I}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dx^\mu/d\tau)} \tag{6}$$

に帰着するので、$\mu = t,\, r,\, \theta,\, \varphi$ に対する 4 つの式が得られる。その結果を測地線の式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{7}$$

と比較して、対応する項から $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を読み取れば良い。以下、t と r に対する微分をそれぞれ $\dot{}$ と $'$ で記すことにして、(6) 式を具体的に計算してみよう。

問 (3.1) (6) 式の $\mu = t$ 成分を書き下し、$\Gamma^{t}{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。[10 点]

問 (3.2) (6) 式の $\mu = r$ 成分を書き下し、$\Gamma^{r}{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。[10 点]

[4] **球対称時空に対するリッチテンソル**

球対称時空:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}dr^2 + \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{8}$$

に対するクリストッフェル記号の 0 でない成分は以下の表の通りである。

表 1: 球対称計量に対するクリストッフェル記号 ($\dot{}$ と $'$ はそれぞれ t と r に対する微分を表す)。

Γ	t	r	θ	φ
tt	$\dot\phi$	$\phi' e^{2\phi-2\lambda}$	0	0
tr	ϕ'	$\dot\lambda$	0	0
$t\theta$	0	0	$\dot\chi/\chi$	0
$t\varphi$	0	0	0	$\dot\chi/\chi$
rr	$\dot\lambda e^{2\lambda-2\phi}$	λ'	0	0
$r\theta$	0	0	χ'/χ	0
$r\varphi$	0	0	0	χ'/χ
$\theta\theta$	$\dot\chi\chi e^{-2\phi}$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}$	0	0
$\theta\varphi$	0	0	0	$\cot\theta$
$\varphi\varphi$	$\dot\chi\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta$	$-\sin\theta\cos\theta$	0

対応するリッチテンソルを具体的に計算してみよう。必要な公式は

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\nu} \tag{9}$$

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\mu} \tag{10}$$

である。

問 (4.1) R_{tt} を求めよ。[10 点]

問 (4.2) R_{tr} を求めよ。[10 点]

問 (4.3) R_{rr} を求めよ。[10 点]

2008 年度一般相対論 中間試験問題および練習問題の解答例

[1] ブラックホールの密度

解 (1.1)

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 = \frac{4\pi}{3}\rho\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3 \tag{11}$$

より、

$$M = \frac{c^3}{2G}\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} \approx 1.35\times 10^8\sqrt{\frac{1\,\mathrm{g/cc}}{\rho}}\,M_\odot, \tag{12}$$

$$R = c\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} \approx 4\times 10^{13}\sqrt{\frac{1\,\mathrm{g/cc}}{\rho}}\,\mathrm{cm} \tag{13}$$

という関係が得られる。

解 (1.2) 大気の平均密度は $\rho \approx 10^{-3}\mathrm{g/cc}$ なので、(12) 式より

$$M \approx 4.3\times 10^9\,M_\odot \qquad R \approx 1.3\times 10^{15}\,\mathrm{cm} \sim 100\,\mathrm{AU}. \tag{14}$$

海王星の軌道長半径は約 30 天文単位であり、100 天文単位は小惑星や彗星の起源であると考えられているエッジワース・カイパーベルトまでの距離に対応する。つまり、現在知られている太陽系の端までのスケールである。

解 (1.3) 宇宙の平均密度は、$\rho \approx 10^{-29}\mathrm{g/cc}$ なので、同様に して

$$M \approx 4.3\times 10^{22}\,M_\odot \qquad R \approx 1.3\times 10^{28}\,\mathrm{cm} \sim 4000\,\mathrm{Mpc}. \tag{15}$$

が得られる。この値は宇宙年齢 137 億年 かけて光が進む距離

$$ct_0 \approx 3\times 10^{10}\mathrm{cm/s}\times 137\times 10^8\times 3\times 10^7\mathrm{s} \approx 1.3\times 10^{28}\,\mathrm{cm} \tag{16}$$

と一致する。つまり、我々を中心とした領域はブラックホール内部であるということもできる。我々はハッブル半径をシュワルツシルド半径としたブラックホールの領域を拡大しながら進化しているわけだ。

解 (1.4) 天文学的に重要であるブラックホールは数 $M_\odot$ から $10^9 M_\odot$ 程度であるため、(極度に) 高密度な環境である。したがって、内部に居住することは不可能であろう。しかし、どんなに低密度でも十分ひろがった領域を考えると、それは外部に対してはブラックホールのようになっていることがわかる。実際、我々のハッブル半径以内の宇宙はある意味では外部に対してはブラックホールなのである。したがって、ブラックホールの中で “快適に” 暮らす (もしも我々がそう感じていればの話であるが、世の中には辛いこともまた多いことは認めざるを得ない) ことすら可能である。

[2] GPS と一般相対論

解 (2.1) この観測者の測定する固有時間は (1) 式の左辺そのものである。この観測者は r 方向と φ 方向には運動していないから

$$dt_\oplus^2 = \left[1 - \frac{2GM_\oplus}{r_\oplus} - r_\oplus^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]dt^2 = \left[1 - \frac{2GM_\oplus}{r_\oplus} - r_\oplus^2 w_\oplus^2\right]dt^2. \tag{17}$$

解 (2.2) 座標時間を用いれば (17) 式と同様にして $dt_{\rm gps}$ は

$$dt_{\rm gps}^2 = \left[1 - \frac{2GM_\oplus}{r_{\rm gps}} - r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2\right]dt^2. \tag{18}$$

したがって、(17) 式との比をとると

$$\begin{aligned}\frac{dt_\oplus}{dt_{\rm gps}} &= \sqrt{\frac{1-2GM_\oplus/r_\oplus - r_\oplus^2 w_\oplus^2}{1-2GM_\oplus/r_{\rm gps} - r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2}} \\ &\approx 1 + \frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} + \frac{r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r_\oplus} - \frac{r_\oplus^2 w_\oplus^2}{2}\end{aligned} \tag{19}$$

解 (2.3) まず、地球の半径は (以下では参考のため、括弧内により正確な数値を示してある)

$$r_\oplus \approx \frac{4\,万\,\mathrm{km}}{2\pi} = 6000\mathrm{km} \quad (6378\mathrm{km}). \tag{20}$$

GPS 衛星は地球の重力によるケプラー運動をしているから

$$\frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} = v_{\rm gps}^2 = (r_{\rm gps}w_{\rm gps})^2. \tag{21}$$

ここで、

$$\begin{aligned} r_{\rm gps} &= r_\oplus + 2\,万\,\mathrm{km} \approx 2.6\,万\,\mathrm{km}, \quad (26578\mathrm{km}) \\ w_{\rm gps} &= \frac{2\pi}{12\times 3600\,秒} \approx \frac{1}{7000\,秒}, \\ v_{\rm gps} &= r_{\rm gps}w_{\rm gps} \approx 3.7\mathrm{km/s} \quad (3.87\mathrm{km/s}) \end{aligned} \tag{22}$$

を代入し、c を補って単位を揃えると

$$\begin{aligned}\frac{GM_\oplus}{c^2 r_\oplus} &= \frac{r_{\rm gps}}{r_\oplus}\frac{GM_\oplus}{c^2 r_{\rm gps}} \approx \frac{2.6\,万\,\mathrm{km}}{6000\mathrm{km}}\left(\frac{3.7\mathrm{km/s}}{30\,万\,\mathrm{km/s}}\right)^2 \\ &\approx 5\times 10^{-10} \quad (6.9\times 10^{-10}).\end{aligned} \tag{23}$$

解 (2.4) (2) 式より

$$\frac{dt_\oplus}{dt_{\rm gps}} - 1 \approx \frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} + \frac{r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r_\oplus} - \frac{r_\oplus^2 w_\oplus^2}{2}. \tag{24}$$

ここで各項の大きさを評価すれば

$$\begin{aligned}
\frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} &= (r_{\rm gps} w_{\rm gps})^2 \approx \left(\frac{3.7\text{km/s}}{30\,\text{万 km/s}}\right)^2 \approx 1.5\times10^{-10} \quad (1.66\times10^{-10})\\
r_\oplus w_\oplus &\approx \frac{4\,\text{万 km}}{24\times3600\,\text{秒}} \approx 0.4\text{km/s} \quad (0.46\text{km/s})\\
\frac{r_\oplus^2 w_\oplus^2}{2} &\approx 0.5\left(\frac{0.4\text{km/s}}{30\,\text{万 km/s}}\right)^2 \approx 10^{-12} \quad (1.2\times10^{-12})
\end{aligned} \tag{25}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
\frac{dt_\oplus}{dt_{\rm gps}} - 1 &\approx 1.5\frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} - \frac{GM_\oplus}{r_\oplus} \approx 2\times10^{-10} - 5\times10^{-10}\\
&\approx -3\times10^{-10} \quad (-4.4\times10^{-10}).
\end{aligned} \tag{26}$$

つまり、地上の時計はGPS衛星上の時計に比べて一日あたり約40マイクロ秒だけ遅く進む。

解 (2.5) ここまでの結果をまとめると、GPSを用いた距離決定精度を決める要因としては1) GPS衛星が搭載している原子時計の精度 $\sim 10^{-15}$s/s、2) 一般相対論的効果 $\sim 10^{-10}$s/s、3) 地上の時計の精度 $\sim 10^{-5}$s/s があげられる。これらを 24×3600 秒 $\times$ 30万km/秒倍して一日あたりの位置の不定性に直せば、それぞれ3cm、3km、30万kmとなる。現在のGPSの精度は数10m程度であることを考えると、まず3)を補正する必要がある。地上の電波時計は、原子時計に基づいた電波信号を毎日受けることで内部のクォーツ時計の誤差を較正しているが、それだけでは役に立たないことは自明である。したがって、GPS衛星の原子時計の精度を生かすべく、3つではなく4つのGPS衛星からの信号を受信することで、位置の3自由度に時刻を加えた4変数を解くようにしてこの問題を回避しているわけだ。

その次に重要となるのが2)の相対論的効果であり、これを補正しなくてはわずか一日後に3kmもの不定性が生まれてしまい、カーナビで目的地に到達することは事実上不可能である。幸い、この効果は(実用上の目的からみればまだ極めて定性的なレベルの議論でしかないが)この設問で取り扱ったように原理的には補正可能である。逆に言えば、現代の我々の日常生活がすでに一般相対論を検証する舞台となっているわけだ。ただし、ここで使っているのはどちらかといえば一般相対論の出発点である等価原理なのであり、一般相対論そのものの検証というべきではないかもしれない。

しかし、さらに強調したいことはニュートン力学の偉大さである。この一般相対論的補正をする上では、GPS衛星の軌道が正確に決まっていることが大前提である。そしてその軌道決定精度を保証しているのは天体力学= ニュートン力学に他ならない。一般相対論はいろいろな意味で、ニュートン力学の普遍性と定量的予言力に支えられている。

[3] 球対称時空に対するクリストッフェル記号

解 (3.1)

$$
\frac{\partial I}{\partial t} = 2\dot{\phi}e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\lambda}e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\chi}\chi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\chi}\chi\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2
$$

$$
\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dt/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(2e^{2\phi}\frac{dt}{d\tau}\right) = 2\left(2\dot{\phi}\frac{dt}{d\tau} + 2\phi'\frac{dr}{d\tau}\right)e^{2\phi}\frac{dt}{d\tau} + 2e^{2\phi}\frac{d^2t}{d\tau^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \frac{d^2t}{d\tau^2} + \dot{\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + 2\phi'\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} \\
& \qquad + \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{27}
$$

したがって、0 ではない ${\Gamma^t}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$
\begin{aligned}
&{\Gamma^t}_{tt} = \dot{\phi}, \quad {\Gamma^t}_{rr} = \dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi}, \quad {\Gamma^t}_{rt} = {\Gamma^t}_{tr} = \phi', \\
&{\Gamma^t}_{\theta\theta} = \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}, \quad {\Gamma^t}_{\varphi\varphi} = \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{28}
$$

解 (3.2)

$$
\frac{\partial I}{\partial r} = 2\phi' e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 2\lambda' e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 2\chi'\chi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - 2\chi'\chi\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2
$$

$$
\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dr/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(-2e^{2\lambda}\frac{dr}{d\tau}\right) = -2\left(2\dot{\lambda}\frac{dt}{d\tau} + 2\lambda'\frac{dr}{d\tau}\right)e^{2\lambda}\frac{dr}{d\tau} - 2e^{2\lambda}\frac{d^2r}{d\tau^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \frac{d^2r}{d\tau^2} + \lambda'\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \phi' e^{2\phi-2\lambda}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\dot{\lambda}\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} \\
& - \chi'\chi e^{-2\lambda}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \chi'\chi\sin^2\theta e^{-2\lambda}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{29}
$$

したがって、0 ではない ${\Gamma^r}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$
\begin{aligned}
&{\Gamma^r}_{rr} = \lambda', \quad {\Gamma^r}_{tt} = \phi' e^{2\phi-2\lambda}, \quad {\Gamma^r}_{rt} = {\Gamma^r}_{tr} = \dot{\lambda}, \\
&{\Gamma^r}_{\theta\theta} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}, \quad {\Gamma^r}_{\varphi\varphi} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{30}
$$

[4] 球対称時空に対するリッチテンソル

解 (4.1) まずリッチテンソルの公式より

$$R_{tt} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{tt} - \partial_t \Gamma^\mu{}_{t\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{tt} - \Gamma^\mu{}_{\gamma t}\Gamma^\gamma{}_{t\mu}. \tag{31}$$

クリストッフェル記号の 0 でない成分を代入すれば

$$\begin{cases}
\text{第 1 項：} & \partial_t \Gamma^t{}_{tt} + \partial_r \Gamma^r{}_{tt} = \ddot{\phi} + \partial_r(\phi' e^{2\phi-2\lambda}) \\
& = \ddot{\phi} + (\phi'' + 2\phi'^2 - 2\phi'\lambda')e^{2\phi-2\lambda} \\
\text{第 2 項：} & -\partial_t(\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^r{}_{tr} + \Gamma^\theta{}_{t\theta} + \Gamma^\varphi{}_{t\varphi}) \\
& = -\partial_t(\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi) = -\ddot{\phi} - \ddot{\lambda} - 2\ddot{\chi}/\chi + 2\dot{\chi}^2/\chi^2 \\
\text{第 3 項：} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{tt} \\
& = (\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi)\dot{\phi} + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\phi' e^{2\phi-2\lambda} \\
\text{第 4 項：} & -\Gamma^\mu{}_{tt}\Gamma^t{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{rt}\Gamma^r{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{\theta t}\Gamma^\theta{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{\varphi t}\Gamma^\varphi{}_{t\mu} \\
& = -(\Gamma^t{}_{tt}\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^r{}_{tt}\Gamma^t{}_{tr}) - (\Gamma^t{}_{rt}\Gamma^r{}_{tt} + \Gamma^r{}_{rt}\Gamma^r{}_{tr}) \\
& \qquad -\Gamma^\theta{}_{\theta t}\Gamma^\theta{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi t}\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} \\
& = -\dot{\phi}^2 - 2\phi'^2 e^{2\phi-2\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\dot{\chi}^2/\chi^2
\end{cases} \tag{32}$$

$$\Rightarrow \quad R_{tt} = -\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + \dot{\phi}\dot{\lambda} + \frac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} - \frac{2\ddot{\chi}}{\chi} + \left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\phi'}{\chi}\right)e^{2\phi-2\lambda} \tag{33}$$

解 (4.2)

$$R_{tr} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{tr} - \partial_r \Gamma^\mu{}_{t\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{tr} - \Gamma^\mu{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\mu} \tag{34}$$

$$\begin{cases}
\text{第 1 項：} & \partial_t \Gamma^t{}_{tr} + \partial_r \Gamma^r{}_{tr} = \dot{\phi}' + \dot{\lambda}' \\
\text{第 2 項：} & -\partial_r(\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi) = -\dot{\phi}' - \dot{\lambda}' - 2\dot{\chi}'/\chi + 2\dot{\chi}\chi'/\chi^2 \\
\text{第 3 項：} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{tr} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{tr} \\
& = (\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi)\phi' + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\dot{\lambda} \\
\text{第 4 項：} & -\Gamma^t{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{tt} - \Gamma^r{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{tr} - \Gamma^\theta{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\varphi} \\
& = -\Gamma^t{}_{tr}\Gamma^t{}_{tt} - \Gamma^t{}_{rr}\Gamma^r{}_{tt} - \Gamma^r{}_{tr}\Gamma^t{}_{tr} - \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{tr} \\
& \qquad -\Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} \\
& = -\dot{\phi}\phi' - 2\dot{\lambda}\phi' - \dot{\lambda}\lambda' - 2\dot{\chi}\chi'/\chi^2
\end{cases} \tag{35}$$

$$\Rightarrow \quad R_{tr} = \frac{2}{\chi}(\dot{\chi}\phi' + \dot{\lambda}\chi' - \dot{\chi}') \tag{36}$$

解 (4.3)

$$R_{rr} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{rr} - \partial_r \Gamma^\mu{}_{r\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{rr} - \Gamma^\mu{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{r\mu} \tag{37}$$

$$\begin{cases} \text{第 1 項:} & \partial_t \Gamma^t{}_{rr} + \partial_r \Gamma^r{}_{rr} = \partial_t(\dot\lambda e^{2\lambda-2\phi}) + \lambda'' \\ & = (\ddot\lambda + 2\dot\lambda^2 - 2\dot\lambda\dot\phi)e^{2\lambda-2\phi} + \lambda'' \\ \text{第 2 項:} & -\partial_r(\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi) = -\phi'' - \lambda'' - 2\chi''/\chi + 2\chi'^2/\chi^2 \\ \text{第 3 項:} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{rr} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{rr} \\ & = (\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi)\dot\lambda e^{2\lambda-2\phi} + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\lambda' \\ \text{第 4 項:} & -\Gamma^\mu{}_{tr}\Gamma^t{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{rr}\Gamma^r{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{r\mu} \\ & = -(\Gamma^t{}_{tr}\Gamma^t{}_{rt} + \Gamma^r{}_{tr}\Gamma^t{}_{rr}) - (\Gamma^t{}_{rr}\Gamma^r{}_{rt} + \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{rr}) \\ & \quad -\Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} \\ & = -\phi'^2 - 2\dot\lambda^2 e^{2\lambda-2\phi} - \lambda'^2 - 2\chi'^2/\chi^2 \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ R_{rr} = -\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \frac{2\chi''}{\chi} \\ + \left(\ddot\lambda + \dot\lambda^2 - \dot\lambda\dot\phi + \frac{2\dot\chi\dot\lambda}{\chi}\right)e^{2\lambda-2\phi} \end{aligned} \tag{39}$$