2008年度一般相対論期末試験

2008年7月22日 (火) 10:15am – 11:45am 於 理学部1号館 206, 207号室

以下の設問を適宜選択して解答せよ。何問答えようとも、講義の最終成績に反映される点数は得点のうち 60 点を上限とする。日本語と英語のどちらで答えてもよいが、結果だけではなく、それを導いた過程が明確となるように記述せよ。手書き（自筆）のノートは持ち込んで参照して良い（自分のものであってもコピーは不可）。

以下では、$c = 1$ の単位系をとる。

[1] シュワルツシルドの内部解

時間に依存しない球対称時空の計量：

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{1}$$

に対するトールマン・オッペンハイマー・ボルコフ (TOV) 方程式は

$$-r^2 \frac{dp}{dr} = \frac{G(\rho+p)(m+4\pi p r^3)}{1-2Gm/r}, \quad m = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr \tag{2}$$

である (p は圧力、ρ はエネルギー密度)。この TOV 方程式の一様密度解：

$$\rho(r) = \rho_0 \tag{3}$$

を具体的に計算してみよう。

問 (1.1) (3) 式を状態方程式として、(2) 式を積分せよ。ただし積分定数はまだ決めなくてよい。また必要であれば、$\kappa_0 \equiv \sqrt{8\pi G\rho_0/3}$ とおいてよい。[5 点]

問 (1.2) $r = R_\mathrm{s}$ で $p = 0$ となるようにして積分定数を決め、$r < R_\mathrm{s}$ での $p(r)$ の表式を求めよ。必要であれば κ_0 あるいは $M_\mathrm{s} \equiv 4\pi\rho_0 R_\mathrm{s}^3/3$ を用いて良い。 [5 点]

問 (1.3) アインシュタイン方程式より (1) 式に対する計量は

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1-2Gm/r} \qquad e^{2\phi} = \exp\left[-\int_r^\infty \frac{2G[m(x)+4\pi p(x)x^3]}{x^2-2Gm(x)x}dx\right] \tag{4}$$

で与えられる。$r > R_\mathrm{s}$ では真空 ($p = 0,\ \rho = 0$) としてこれを具体的に計算することで、一様密度球に対する $r < R_\mathrm{s}$ での時空の計量を求めよ。 [5 点]

[2] ダークエネルギーの状態方程式とビッグリップ

$K = 0$ で、状態方程式が $p = w\rho$ (ただし、w は定数) にしたがうダークエネルギーと非相対論的物質が存在する宇宙を考える。このときフリードマン方程式は

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_\mathrm{m}}{a} + \frac{\Omega_\mathrm{de}}{a^{(1+3w)}}\right], \tag{5}$$

となる。ここで H_0 はハッブル定数、 $\Omega_{\rm m}$ と $\Omega_{\rm de}$ は非相対論的物質とダークエネルギーの密度パラメータである。もしも $w < -1$ であれば、このモデルのスケール因子はある有限の時刻 $t = t_\infty$ で発散する。これをビッグリップと呼ぶ。$\Omega_{\rm de} \gg \Omega_{\rm m}$ が成り立つと仮定して、現在からビッグリップまでに残された時間 $\Delta t \equiv t_\infty - t_0$ を計算せよ。 [5 点]

[3] フェルマーの原理

静的時空:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu,0} = 0 \text{ (時間に依存しない)}, \; g_{0i} = 0 \text{ (時間反転に対して不変)} \tag{6}$$

において、光線は 2 点 A、B を結ぶ経路の所要時間が最小となるように進む。すなわち

$$\delta(\Delta t_{\rm AB}) \equiv \delta \int_{\rm A}^{\rm B} dt = 0. \tag{7}$$

このことを以下にしたがって証明せよ。

問 (3.1) アファインパラメータを λ としたとき、一般に光の測地線は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{8}$$

で与えられる。静的時空の条件である (6) 式を用いて、(8) 式の λ を t で書き換えることにする。まず、(8) 式の $\mu = 0$ 成分を変形すると

$$\frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2} = -2\Gamma^0{}_{0i}\frac{dx^i}{dt} = -2g^{00}\Gamma_{00i}\frac{dx^i}{dt} = -2\frac{\Gamma_{00i}}{g_{00}}\frac{dx^i}{dt} \tag{9}$$

となることを示せ。 [5 点]

問 (3.2) (9) 式を (8) 式の $\mu = k$ $(k = 1, 2, 3)$ 成分に代入して変形すると

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} - \frac{2}{g_{00}}\Gamma_{00i}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \left(-\Gamma^k{}_{00}\frac{g_{ij}}{g_{00}} + \Gamma^k{}_{ij}\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{10}$$

が得られることを示せ。 [5 点]

問 (3.3)

$$\gamma_{ij} \equiv -\frac{g_{ij}}{g_{00}} \quad \Rightarrow \quad dt^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{11}$$

を定義すると、(10) 式が

$$\gamma_{lk}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}(\gamma_{li,j} + \gamma_{lj,i} - \gamma_{ij,l})\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{12}$$

に帰着することを示せ。 [5 点]

問 (3.4) 以上の結果をまとめて上記のフェルマーの原理が成り立つことを示せ。 [5 点]

[4] 円対称重力レンズ天体に対する曲がり角 α

薄いレンズ近似のもとでは、円対称レンズ天体Lに対して $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{I}}$ の角度をなす光線の曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ が

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = 4GD_{\mathrm{OL}}\frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2}\int_0^{\theta_{\mathrm{I}}} 2\pi\theta\Sigma(\theta)\ d\theta \tag{13}$$

で与えられることを用いて以下の問に答えよ。ここで、D_{OL} は観測者とLとの距離であり、$\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ は物質の質量密度のレンズ平面上への射影で定義される2次元面密度

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \int \rho(D_{\mathrm{OL}}\theta_{\mathrm{x}}, D_{\mathrm{OL}}\theta_{\mathrm{y}}, z)\ dz \tag{14}$$

である。

問 (4.1) Lの位置に質量 M の質点がある場合

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = \frac{4GM}{D_{\mathrm{OL}}}\frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2} \tag{15}$$

となることを示せ。またこの結果は、質点のまわりの光線の曲がり角が

$$\alpha = 2\frac{r_{\mathrm{s}}(M)}{b} \tag{16}$$

で与えられる (b は最近接点と質点との距離、r_{s} はシュワルツシルド半径) という事実と等価であることを簡単に説明せよ。 [10 点]

問 (4.2) 渦巻銀河の中心から距離 r の点での回転速度

$$V_{\mathrm{c}} \equiv \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \tag{17}$$

は、r が大きいところでは、r によらず一定であることが知られている。(17) 式がすべての r について厳密に成り立つ場合に、この銀河の密度分布が球対称であるならば

$$\rho(r) = \frac{V_{\mathrm{c}}^2}{4\pi G r^2} \tag{18}$$

となることを示せ。この結果は、銀河を球対称な等温理想気体であると仮定し、圧力が

$$p(r) = \rho(r)\sigma_v^2 \tag{19}$$

で与えられることを用いて、静水圧平衡の式:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho, \qquad M = 4\pi\int_0^r \rho r^2 dr \tag{20}$$

を解くことからも導ける。ここで、σ_v は r によらない1次元の速度分散である (この理想気体ガスは星であると考えても良いし、ダークマター粒子であるとしても良い)。

速度分布関数が等方的であるとしたとき、

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}}V_{\mathrm{c}} \tag{21}$$

であることを示し、(18) 式が (19)〜(20) 式の解になっていることを確かめよ。[10 点]

問 (4.3) (18) 式の分布は $r=0$ で発散する。それを防ぐために、

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2+r_{\rm c}^2}, \tag{22}$$

のように、中心で有限のコア半径 r_c を持つ分布を考える。このとき、(13) 式の $\boldsymbol{\alpha}$ は、$\theta_{\rm c} \equiv r_{\rm c}/D_{\rm OL}$ として

$$\boldsymbol{\alpha} = 4\pi\sigma_v^2 \frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}}{\theta_{\rm I}^2}\left(\sqrt{\theta_{\rm I}^2+\theta_{\rm c}^2}-\theta_{\rm c}\right) \tag{23}$$

となることを示せ。[10 点]

[5] 測地線偏差の方程式

近接した 2 点 x^μ と $x^\mu+\xi^\mu$ にある質点がそれぞれ自由運動しているものとする ($\xi^\mu \ll x^\mu$)。それらの運動方程式は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \quad + \quad \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{d^2(x^\mu+\xi^\mu)}{d\tau^2} \quad + \quad \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x+\xi)\frac{d(x^\alpha+\xi^\alpha)}{d\tau}\frac{d(x^\beta+\xi^\beta)}{d\tau} = 0 \tag{25}$$

である。

問 (5.1) (24) 式と (25) 式の差をとって、ξ^μ に関する最低次を残し、線形化された運動方程式を求めよ。[10 点]

問 (5.2) τ に関する ξ^μ の絶対微分を

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\mu{}_{;\beta} = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{26}$$

で定義する。この操作を繰り返して $D^2\xi^\mu/D\tau^2$ を計算せよ。[10 点]

問 (5.3) これらの結果を組み合わせて、測地線偏差の方程式:

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} + R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\xi^\beta\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \tag{27}$$

を導け。[10 点]