2009年度 一般相対論 中間試験

2009年5月19日(火) 10:15am – 11:45am 理学部1号館 207号室、233号室

以下の設問を適宜選択して解答せよ。全問回答する必要はなく、講義の最終成績に反映される点数は得点のうち60点を上限とする。日本語と英語のどちらで答えてもよいが、結果だけではなく、それを導いた過程が明確となるように記述せよ。手書き（自筆）のノートは持ち込んで参照して良い（自分のものであってもコピーは不可）。

[**1**] 計量テンソルの行列式と4元ベクトルの発散に関する以下の設問に答えよ。

問 (1.1) 計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ の行列式:

$$g \equiv \det(g_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

に対して

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} \tag{2}$$

を導け。必要であれば、$g_{\alpha\beta}$ の余因子行列 $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ が満たす式:

$$\tilde{g}^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = g\delta^\mu{}_\alpha \tag{3}$$

を既知として用いてよい。ここで $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ は $g_{\alpha\beta}$ の第 α 行と第 β 列とを除いてできる行列式に $(-1)^{\alpha+\beta}$ をかけてできる余因子のつくる行列である。[10点]

問 (1.2) (2)式を用いて反変ベクトルの発散が次式を満たすことを示せ. [5点]

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}A^\mu). \tag{4}$$

問 (1.3) (4)式を利用して共変化されたダランベルシアンの表式が

$$\nabla_\mu\nabla^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \tag{5}$$

と書けることを示せ。この表式を利用して、極座標での3次元ラプラシアンを書き下せ。[10点]

問 (1.4) 任意の2階対称テンソル $T_{\mu\nu}(=T_{\nu\mu})$ に対して

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu)}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}T^{\mu\alpha} \tag{6}$$

が成り立つことを示せ。[5点]

[2] 球対称時空の線素:

$$d\tau^2 = e^{2\phi(r,t)}dt^2 - e^{2\lambda(r,t)}dr^2 - \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{7}$$

に対して

$$S = -\int I d\tau, \quad I \equiv e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \tag{8}$$

を定義する。これを τ に関して変分した結果はオイラー・ラグランジュ方程式:

$$\frac{\partial I}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dx^\mu/d\tau)} \tag{9}$$

に帰着するので、$\mu = t,\, r,\, \theta,\, \varphi$ に対する 4 つの式が得られる。その結果を測地線の式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{10}$$

と比較して、対応する項から $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ を読み取ればクリストッフェル記号を計算できる。以下、必要であれば t と r に対する微分をそれぞれ $\dot{}$ と $'$ で記して良い。

問 (2.1) (9) 式の $\mu = t$ 成分を書き下し、$\Gamma^t{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。[10 点]

問 (2.2) (9) 式の $\mu = r$ 成分を書き下し、$\Gamma^r{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。[10 点]

[3] [2] の計量に対するクリストッフェル記号は以下の表の通りである。

Γ	t	r	θ	φ
tt	$\dot{\phi}$	$\phi' e^{2\phi-2\lambda}$	0	0
tr	ϕ'	$\dot{\lambda}$	0	0
$t\theta$	0	0	$\dot{\chi}/\chi$	0
$t\varphi$	0	0	0	$\dot{\chi}/\chi$
rr	$\dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi}$	λ'	0	0
$r\theta$	0	0	χ'/χ	0
$r\varphi$	0	0	0	χ'/χ
$\theta\theta$	$\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}$	0	0
$\theta\varphi$	0	0	0	$\cot\theta$
$\varphi\varphi$	$\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta$	$-\sin\theta\cos\theta$	0

問 (3.1) リッチテンソルに対する公式:

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\mu} \tag{11}$$

を使って、R_{tt} を求めよ。[10 点]

問 (3.2) R_{tr} を求めよ。[10 点]

問 (3.3) R_{rr} を求めよ。[10 点]

2009 年度一般相対論 中間試験問題の解答例

[1] 計量テンソルの行列式と 4 元ベクトルの発散

解 (1.1) (3) 式より

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \tag{12}$$

であることがわかる。g の x^μ に関する偏微分はすべて $g_{\alpha\beta}$ に関する偏微分を通じて得られるので、

$$\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \underbrace{=}_{(3)\text{ 式}} \tilde{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \underbrace{=}_{(12)\text{ 式}} g g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \tag{13}$$

が成り立つ。$g < 0$ であることを考慮すると，この式は

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} = g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \tag{14}$$

と変形される．これが (2) 式の一つめの等式である。さらにクリストッフェル記号は計量テンソルを用いて

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \tag{15}$$

と書けるから

$$2\Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} = g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu}) = g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \tag{16}$$

となり、(2) 式の 2 つめの等式が示された。

ちなみに (3) 式は次のようにして証明できる。まず、$g_{\nu\mu}$ を行列としてみたときに、その μ 列の成分をすべて α 列の成分に置き換えた行列の行列式を $a^\mu{}_\alpha$ とする。この定義よりその対角成分 $a^0{}_0 = a^1{}_1 = a^2{}_2 = a^3{}_3$ はいずれも g となる。一方、非対角成分として例えば $a^1{}_2$ を考えると

$$a^1{}_2 = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{02} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{12} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{22} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{33} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{17}$$

であるが、これは行列式の定義より 0 である。一方、この行列式を余因子展開すれば

$$a^1{}_2 = \tilde{g}^{1\nu}g_{\nu 2} \tag{18}$$

と書ける。これからわかるように $\mu \neq \alpha$ の場合 (3) 式の左辺が 0 となることがわかる。以上より、(3) 式が証明された。

解 (1.2) (2) 式を用いて (4) 式の右辺を変形すれば

$$A^{\mu}{}_{,\mu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} = A^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} A^{\mu}. \tag{19}$$

これは (4) 式の左辺である $A^{\mu}{}_{;\mu}$ の定義そのものである。

解 (1.3) 共変性は別に相対論だけで重要なのではなく、デカルト座標における演算子を曲線座標で表示する場合などでも役に立つことを示す例である。

(4) 式の A^{μ} に $f^{;\mu} = g^{\mu\nu} f_{,\nu}$ を代入すれば良い。

$$f^{;\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g} f^{,\mu}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} \right). \tag{20}$$

したがって、(5) 式:

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right). \tag{21}$$

が導かれた。

(5) を 3 次元の場合に用いると、ラプラシアンの一般座標での表式は

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{i}} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{j}} \right). \tag{22}$$

ここで g は g_{ij} の行列式 $\det(g_{ij})$ である。具体的に極座標

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \tag{23}$$

に対しては

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \tag{24}$$

なので、$\sqrt{g} = r^2 \sin \theta$。これを (22) 式に代入すると

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \tag{25}$$

となり、なじみぶかい結果：

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{26}$$

が容易に導かれる。

解 (1.4) 定義より

$$T^{\mu}{}_{\nu;\alpha} = T^{\mu}{}_{\nu,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} T^{\beta}{}_{\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha} T^{\mu}{}_{\beta} = T^{\mu}{}_{\nu,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} T^{\beta}{}_{\nu} - \Gamma_{\beta\nu\alpha} T^{\mu\beta} \tag{27}$$

なので、$\alpha = \mu$ の場合

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = T^{\mu}{}_{\nu,\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu} T^{\beta}{}_{\nu} - \Gamma_{\beta\nu\mu} T^{\mu\beta} \tag{28}$$

問 (1.2) と同様に、上式の第一項と第二項は

$$T^{\mu}{}_{\nu,\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu} T^{\beta}{}_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} T^{\mu}{}_{\nu})}{\partial x^{\mu}} \tag{29}$$

にまとめられる。残る第三項は $T^{\mu\beta} = T^{\beta\mu}$ を用いると

$$-\Gamma_{\beta\nu\mu} T^{\mu\beta} = \frac{1}{2}(g_{\nu\mu,\beta} - g_{\beta\nu,\mu} - g_{\beta\mu,\nu}) T^{\mu\beta} = -\frac{1}{2} g_{\beta\mu,\nu} T^{\mu\beta}. \tag{30}$$

したがって (6) 式:

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} T^{\mu}{}_{\nu})}{\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} T^{\mu\alpha} \tag{31}$$

が証明された。

[2] 球対称時空に対するクリストッフェル記号

解 (2.1)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial t} = 2\dot{\phi} e^{2\phi} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\lambda} e^{2\lambda} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\chi}\chi \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\chi}\chi \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\
&\frac{d}{d\tau} \frac{\partial I}{\partial(dt/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(2e^{2\phi} \frac{dt}{d\tau}\right) = 2\left(2\dot{\phi}\frac{dt}{d\tau} + 2\phi' \frac{dr}{d\tau}\right) e^{2\phi} \frac{dt}{d\tau} + 2e^{2\phi} \frac{d^2 t}{d\tau^2} \\
\Rightarrow \quad &\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \dot{\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \dot{\lambda} e^{2\lambda - 2\phi} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + 2\phi' \frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} \\
&\qquad + \dot{\chi}\chi e^{-2\phi} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \dot{\chi}\chi e^{-2\phi} \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

したがって、0 ではない $\Gamma^{t}{}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{t}{}_{tt} = \dot{\phi}, \quad \Gamma^{t}{}_{rr} = \dot{\lambda} e^{2\lambda - 2\phi}, \quad \Gamma^{t}{}_{rt} = \Gamma^{t}{}_{tr} = \phi', \\
&\Gamma^{t}{}_{\theta\theta} = \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}, \quad \Gamma^{t}{}_{\varphi\varphi} = \dot{\chi}\chi e^{-2\phi} \sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{33}$$

解 (2.2)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial r} = 2\phi' e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 2\lambda' e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 2\chi'\chi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - 2\chi'\chi\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\
&\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dr/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(-2e^{2\lambda}\frac{dr}{d\tau}\right) = -2\left(2\dot\lambda\frac{dt}{d\tau} + 2\lambda'\frac{dr}{d\tau}\right)e^{2\lambda}\frac{dr}{d\tau} - 2e^{2\lambda}\frac{d^2r}{d\tau^2} \\
\Rightarrow \quad & \frac{d^2r}{d\tau^2} + \lambda'\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \phi' e^{2\phi-2\lambda}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\dot\lambda\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} \\
&\qquad - \chi'\chi e^{-2\lambda}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \chi'\chi\sin^2\theta e^{-2\lambda}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{34}
$$

したがって、0 ではない $\Gamma^r{}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^r{}_{rr} = \lambda', \quad \Gamma^r{}_{tt} = \phi' e^{2\phi-2\lambda}, \quad \Gamma^r{}_{rt} = \Gamma^r{}_{tr} = \dot\lambda, \\
&\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}, \quad \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{35}
$$

[3] 球対称時空に対するリッチテンソル

解 (3.1) まずリッチテンソルの公式より

$$
R_{tt} = \partial_\mu\Gamma^\mu{}_{tt} - \partial_t\Gamma^\mu{}_{t\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{tt} - \Gamma^\mu{}_{\gamma t}\Gamma^\gamma{}_{t\mu}. \tag{36}
$$

クリストッフェル記号の 0 でない成分を代入すれば

$$
\begin{cases}
\text{第 1 項：} & \partial_t\Gamma^t{}_{tt} + \partial_r\Gamma^r{}_{tt} = \ddot\phi + \partial_r(\phi' e^{2\phi-2\lambda}) \\
& = \ddot\phi + (\phi'' + 2\phi'^2 - 2\phi'\lambda')e^{2\phi-2\lambda} \\
\text{第 2 項：} & -\partial_t(\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^r{}_{tr} + \Gamma^\theta{}_{t\theta} + \Gamma^\varphi{}_{t\varphi}) \\
& = -\partial_t(\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi) = -\ddot\phi - \ddot\lambda - 2\ddot\chi/\chi + 2\dot\chi^2/\chi^2 \\
\text{第 3 項：} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{tt} \\
& = (\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi)\dot\phi + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\phi' e^{2\phi-2\lambda} \\
\text{第 4 項：} & -\Gamma^\mu{}_{tt}\Gamma^t{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{rt}\Gamma^r{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{\theta t}\Gamma^\theta{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{\varphi t}\Gamma^\varphi{}_{t\mu} \\
& = -(\Gamma^t{}_{tt}\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^r{}_{tt}\Gamma^t{}_{tr}) - (\Gamma^t{}_{rt}\Gamma^r{}_{tt} + \Gamma^r{}_{rt}\Gamma^r{}_{tr}) \\
& \qquad -\Gamma^\theta{}_{\theta t}\Gamma^\theta{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi t}\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} \\
& = -\dot\phi^2 - 2\phi'^2 e^{2\phi-2\lambda} - \dot\lambda^2 - 2\dot\chi^2/\chi^2
\end{cases} \tag{37}
$$

$$
\Rightarrow \quad R_{tt} = -\ddot\lambda - \dot\lambda^2 + \dot\phi\dot\lambda + \frac{2\dot\chi\dot\phi}{\chi} - \frac{2\ddot\chi}{\chi} + \left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\phi'}{\chi}\right)e^{2\phi-2\lambda} \tag{38}
$$

解 (3.2)

$$
R_{tr} = \partial_\mu\Gamma^\mu{}_{tr} - \partial_r\Gamma^\mu{}_{t\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{tr} - \Gamma^\mu{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\mu} \tag{39}
$$

$$
\begin{cases}
\text{第 1 項：} & \partial_t \Gamma^t{}_{tr} + \partial_r \Gamma^r{}_{tr} = \dot{\phi}' + \dot{\lambda}' \\
\text{第 2 項：} & -\partial_r(\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi) = -\dot{\phi}' - \dot{\lambda}' - 2\dot{\chi}'/\chi + 2\dot{\chi}\chi'/\chi^2 \\
\text{第 3 項：} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{tr} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{tr} \\
& = (\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi)\phi' + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\dot{\lambda} \\
\text{第 4 項：} & -\Gamma^t{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{tt} - \Gamma^r{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{tr} - \Gamma^\theta{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\varphi} \\
& = -\Gamma^t{}_{tr}\Gamma^t{}_{tt} - \Gamma^t{}_{rr}\Gamma^r{}_{tt} - \Gamma^r{}_{tr}\Gamma^t{}_{tr} - \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{tr} \\
& \qquad -\Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} \\
& = -\dot{\phi}\phi' - 2\dot{\lambda}\phi' - \dot{\lambda}\lambda' - 2\dot{\chi}\chi'/\chi^2
\end{cases} \tag{40}
$$

$$
\Rightarrow \quad R_{tr} = \frac{2}{\chi}(\dot{\chi}\phi' + \dot{\lambda}\chi' - \dot{\chi}') \tag{41}
$$

解 (3.3)

$$
R_{rr} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{rr} - \partial_r \Gamma^\mu{}_{r\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{rr} - \Gamma^\mu{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{r\mu} \tag{42}
$$

$$
\begin{cases}
\text{第 1 項：} & \partial_t \Gamma^t{}_{rr} + \partial_r \Gamma^r{}_{rr} = \partial_t(\dot{\lambda}e^{2\lambda - 2\phi}) + \lambda'' \\
& = (\ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}^2 - 2\dot{\lambda}\dot{\phi})e^{2\lambda-2\phi} + \lambda'' \\
\text{第 2 項：} & -\partial_r(\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi) = -\phi'' - \lambda'' - 2\chi''/\chi + 2\chi'^2/\chi^2 \\
\text{第 3 項：} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{rr} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{rr} \\
& = (\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi)\dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi} + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\lambda' \\
\text{第 4 項：} & -\Gamma^\mu{}_{tr}\Gamma^t{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{rr}\Gamma^r{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{r\mu} \\
& = -(\Gamma^t{}_{tr}\Gamma^t{}_{rt} + \Gamma^r{}_{tr}\Gamma^t{}_{rr}) - (\Gamma^t{}_{rr}\Gamma^r{}_{rt} + \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{rr}) \\
& \qquad -\Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} \\
& = -\phi'^2 - 2\dot{\lambda}^2 e^{2\lambda-2\phi} - \lambda'^2 - 2\chi'^2/\chi^2
\end{cases} \tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad R_{rr} = -\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \frac{2\chi''}{\chi} \\
+ \left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\phi} + \frac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right) e^{2\lambda-2\phi}
\end{aligned} \tag{44}
$$