1　球対称時空に対するクリストッフェル記号

球対称時空の線素を

$$d\tau^2 = e^{2\phi(r,t)}dt^2 - e^{2\lambda(r,t)}dr^2 - \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{1}$$

と書く。この計量に対するアインシュタイン方程式を導くには、まずクリストッフェル記号を求め、それからリッチテンソル、さらにスカラー曲率を計算する必要がある。クリストッフェル記号は $g_{\mu\nu}$ から直接

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\Gamma_{\mu\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\frac{1}{2}\,(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \tag{2}$$

を用いて計算することもできるが、対称性の高い時空の場合、長々と計算した挙げ句ほとんどの成分が 0 になり虚しい思いをする。変分法を使うと計算を少しだけ効率的に行うことができる。

作用を

$$S = -\int I d\tau, \quad I \equiv e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \tag{3}$$

と書く。これを τ に関して変分した結果はオイラー・ラグランジュ方程式:

$$\frac{\partial I}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dx^\mu/d\tau)} \tag{4}$$

に帰着するので、$\mu = t, r, \theta, \varphi$ に対する 4 つの式が得られる[1]。その結果を測地線の式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{5}$$

と比較して、対応する項から $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ を読み取れば良い。以下、t と r に対する微分をそれぞれ $\dot{}$ と $'$ で記すことにして、(4) 式を具体的に計算してみよう。

問 (1.1) (4) 式の $\mu = t$ 成分を書き下し、$\Gamma^t{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。

問 (1.2) (4) 式の $\mu = r$ 成分を書き下し、$\Gamma^r{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。

問 (1.3) (4) 式の $\mu = \theta$ 成分を書き下し、$\Gamma^\theta{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。

問 (1.4) (4) 式の $\mu = \varphi$ 成分を書き下し、$\Gamma^\varphi{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ。

[1] あまり美しい記法とは言えないが、わかりやすさのために $\mu = 0$ の代わりに直接 t を添字にすることがある。$x^t = t$ や $x^\theta = \theta$ と書かれると違和感があるが、$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi}$ ならば $\Gamma^2{}_{33}$ よりも対応が明確であろう。

解 (1.1)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial t} = 2\dot{\phi}e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\lambda}e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\chi}\chi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - 2\dot{\chi}\chi\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\
&\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dt/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(2e^{2\phi}\frac{dt}{d\tau}\right) = 2\left(2\dot{\phi}\frac{dt}{d\tau} + 2\phi'\frac{dr}{d\tau}\right)e^{2\phi}\frac{dt}{d\tau} + 2e^{2\phi}\frac{d^2t}{d\tau^2} \\
\Rightarrow \quad &\frac{d^2t}{d\tau^2} + \dot{\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + 2\phi'\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} \\
&\qquad + \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

したがって、0 ではない ${\Gamma^t}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$
\begin{aligned}
&{\Gamma^t}_{tt} = \dot{\phi}, \quad {\Gamma^t}_{rr} = \dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi}, \quad {\Gamma^t}_{rt} = {\Gamma^t}_{tr} = \phi', \\
&{\Gamma^t}_{\theta\theta} = \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}, \quad {\Gamma^t}_{\varphi\varphi} = \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

解 (1.2)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial r} = 2\phi' e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 2\lambda' e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 2\chi'\chi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - 2\chi'\chi\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\
&\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dr/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(-2e^{2\lambda}\frac{dr}{d\tau}\right) = -2\left(2\dot{\lambda}\frac{dt}{d\tau} + 2\lambda'\frac{dr}{d\tau}\right)e^{2\lambda}\frac{dr}{d\tau} - 2e^{2\lambda}\frac{d^2r}{d\tau^2} \\
\Rightarrow \quad &\frac{d^2r}{d\tau^2} + \lambda'\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \phi' e^{2\phi-2\lambda}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\dot{\lambda}\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} \\
&\qquad - \chi'\chi e^{-2\lambda}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \chi'\chi\sin^2\theta e^{-2\lambda}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

したがって、0 ではない ${\Gamma^r}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$
\begin{aligned}
&{\Gamma^r}_{rr} = \lambda', \quad {\Gamma^r}_{tt} = \phi' e^{2\phi-2\lambda}, \quad {\Gamma^r}_{rt} = {\Gamma^r}_{tr} = \dot{\lambda}, \\
&{\Gamma^r}_{\theta\theta} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}, \quad {\Gamma^r}_{\varphi\varphi} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

解 (1.3)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial \theta} = -2\chi^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\
&\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(d\theta/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(-2\chi^2\frac{d\theta}{d\tau}\right) = -4\dot{\chi}\chi\frac{dt}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - 4\chi'\chi\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - 2\chi^2\frac{d^2\theta}{d\tau^2} \\
\Rightarrow \quad &\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2\dot{\chi}}{\chi}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{2\chi'}{\chi}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

したがって、0 ではない ${\Gamma^\theta}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$
{\Gamma^\theta}_{t\theta} = {\Gamma^\theta}_{\theta t} = \frac{\dot{\chi}}{\chi}, \quad {\Gamma^\theta}_{r\theta} = {\Gamma^\theta}_{\theta r} = \frac{\chi'}{\chi}, \quad {\Gamma^\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta.
\tag{11}
$$

解 (1.4)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial \varphi} = 0 \\
&\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial (d\theta/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(-2\chi^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau}\right) \\
&= -2\left(2\dot{\chi}\chi \sin^2\theta \frac{dt}{d\tau} + 2\chi'\chi \sin^2\theta \frac{dr}{d\tau} + 2\chi^2 \sin\theta\cos\theta \frac{d\theta}{d\tau}\right)\frac{d\varphi}{d\tau} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\chi^2 \sin^2\theta \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \\
\Rightarrow \qquad &\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2\dot{\chi}}{\chi}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{2\chi'}{\chi}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + 2\cot\theta \frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

したがって、0 ではない $\Gamma^{\varphi}{}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$
\Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi t} = \frac{\dot{\chi}}{\chi}, \quad \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r} = \frac{\chi'}{\chi}, \quad \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \cot\theta. \qquad (13)
$$

2　球対称時空に対するアインシュタインテンソル

球対称時空:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}dr^2 + \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{1}$$

に対するクリストッフェル記号の 0 でない成分は以下の表の通りである。

表 1: 球対称計量に対するクリストッフェル記号

Γ	t	r	θ	φ
tt	$\dot\phi$	$\phi' e^{2\phi-2\lambda}$	0	0
tr	ϕ'	$\dot\lambda$	0	0
$t\theta$	0	0	$\dot\chi/\chi$	0
$t\varphi$	0	0	0	$\dot\chi/\chi$
rr	$\dot\lambda e^{2\lambda-2\phi}$	λ'	0	0
$r\theta$	0	0	χ'/χ	0
$r\varphi$	0	0	0	χ'/χ
$\theta\theta$	$\dot\chi\chi e^{-2\phi}$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}$	0	0
$\theta\varphi$	0	0	0	$\cot\theta$
$\varphi\varphi$	$\dot\chi\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta$	$-\sin\theta\cos\theta$	0

対応するアインシュタインテンソルを具体的に計算してみよう。ちなみに、必要な公式は

$$R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\nu} \tag{2}$$

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\mu} \tag{3}$$

$$R = R^\mu{}_\mu \tag{4}$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \tag{5}$$

である。

問 (2.1) リッチテンソル R_{tt} を求めよ。

問 (2.2) R_{tr} を求めよ。

問 (2.3) $R_{t\theta}$ を求めよ。

問 (2.4) $R_{t\varphi}$ を求めよ。

問 (2.5) R_{rr} を求めよ。

問 (2.6) $R_{r\theta}$ を求めよ。

問 (2.7) $R_{r\varphi}$ を求めよ。

問 (2.8) $R_{\theta\theta}$ を求めよ。

問 (2.9) $R_{\theta\varphi}$ を求めよ。

問 (2.10) $R_{\varphi\varphi}$ を求めよ。

問 (2.11) リッチスカラー R を求めよ。

問 (2.12) アインシュタインテンソル $G^\alpha{}_\beta$ を求めよ。

解 (2.1) まずリッチテンソルの公式より

$$R_{tt} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{tt} - \partial_t \Gamma^\mu{}_{t\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{tt} - \Gamma^\mu{}_{\gamma t}\Gamma^\gamma{}_{t\mu}. \tag{6}$$

クリストッフェル記号の 0 でない成分を代入すれば

$$\begin{cases} \text{第 1 項:} & \partial_t \Gamma^t{}_{tt} + \partial_r \Gamma^r{}_{tt} = \ddot\phi + \partial_r(\phi' e^{2\phi-2\lambda}) \\ & = \ddot\phi + (\phi'' + 2\phi'^2 - 2\phi'\lambda')e^{2\phi-2\lambda} \\ \text{第 2 項:} & -\partial_t(\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^r{}_{tr} + \Gamma^\theta{}_{t\theta} + \Gamma^\varphi{}_{t\varphi}) \\ & = -\partial_t(\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi) = -\ddot\phi - \ddot\lambda - 2\ddot\chi/\chi + 2\dot\chi^2/\chi^2 \\ \text{第 3 項:} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{tt} \\ & = (\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi)\dot\phi + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\phi' e^{2\phi-2\lambda} \\ \text{第 4 項:} & -\Gamma^\mu{}_{tt}\Gamma^t{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{rt}\Gamma^r{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{\theta t}\Gamma^\theta{}_{t\mu} - \Gamma^\mu{}_{\varphi t}\Gamma^\varphi{}_{t\mu} \\ & = -(\Gamma^t{}_{tt}\Gamma^t{}_{tt} + \Gamma^r{}_{tt}\Gamma^t{}_{tr}) - (\Gamma^t{}_{rt}\Gamma^r{}_{tt} + \Gamma^r{}_{rt}\Gamma^r{}_{tr}) \\ & \quad -\Gamma^\theta{}_{\theta t}\Gamma^\theta{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi t}\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} \\ & = -\dot\phi^2 - 2\phi'^2 e^{2\phi-2\lambda} - \dot\lambda^2 - 2\dot\chi^2/\chi^2 \end{cases} \tag{7}$$

$$\Rightarrow\ R_{tt} = -\ddot\lambda - \dot\lambda^2 + \dot\phi\dot\lambda + \frac{2\dot\chi\dot\phi}{\chi} - \frac{2\ddot\chi}{\chi} + \left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\phi'}{\chi}\right)e^{2\phi-2\lambda} \tag{8}$$

解 (2.2)

$$R_{tr} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{tr} - \partial_r \Gamma^\mu{}_{t\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{tr} - \Gamma^\mu{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\mu} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \text{第 1 項:} & \partial_t \Gamma^t{}_{tr} + \partial_r \Gamma^r{}_{tr} = \dot\phi' + \dot\lambda' \\ \text{第 2 項:} & -\partial_r(\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi) = -\dot\phi' - \dot\lambda' - 2\dot\chi'/\chi + 2\dot\chi\chi'/\chi^2 \\ \text{第 3 項:} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{tr} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{tr} \\ & = (\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi)\phi' + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\dot\lambda \\ \text{第 4 項:} & -\Gamma^t{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{tt} - \Gamma^r{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{tr} - \Gamma^\theta{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{t\varphi} \\ & = -\Gamma^t{}_{tr}\Gamma^t{}_{tt} - \Gamma^t{}_{rr}\Gamma^r{}_{tt} - \Gamma^r{}_{tr}\Gamma^t{}_{tr} - \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{tr} \\ & \quad -\Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} \\ & = -\dot\phi\phi' - 2\dot\lambda\phi' - \dot\lambda\lambda' - 2\dot\chi\chi'/\chi^2 \end{cases} \tag{10}$$

$$\Rightarrow\ R_{tr} = \frac{2}{\chi}(\dot\chi\phi' + \dot\lambda\chi' - \dot\chi') \tag{11}$$

解 (2.3)

$$\begin{aligned} R_{t\theta} &= \underbrace{\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{t\theta}}_{=0} - \underbrace{\partial_\theta \Gamma^\mu{}_{t\mu}}_{=0} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{t\theta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{t\mu} \\ &= \Gamma^\mu{}_{\theta\mu}\Gamma^\theta{}_{t\theta} - \underbrace{\Gamma^t{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{tt}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^r{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{tr}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\theta{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{t\theta}}_{=0} - \Gamma^\varphi{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{t\varphi} \\ &= \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{t\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} = \frac{\dot\chi}{\chi}\cot\theta - \frac{\dot\chi}{\chi}\cot\theta = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

解 (2.4)

$$R_{t\varphi} = \underbrace{\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{t\varphi}}_{=0} - \underbrace{\partial_\varphi \Gamma^\mu{}_{t\mu}}_{=0} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{t\varphi} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\varphi}\Gamma^\gamma{}_{t\mu}$$
$$= \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\varphi\mu}}_{=0}\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{t\varphi}\Gamma^t{}_{t\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{r\varphi}\Gamma^r{}_{t\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{t\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi{}_{t\mu}}_{=0} = 0 \tag{13}$$

解 (2.5)

$$R_{rr} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{rr} - \partial_r \Gamma^\mu{}_{r\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{rr} - \Gamma^\mu{}_{\gamma r}\Gamma^\gamma{}_{r\mu} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \text{第 1 項：} & \partial_t \Gamma^t{}_{rr} + \partial_r \Gamma^r{}_{rr} = \partial_t(\dot\lambda e^{2\lambda-2\phi}) + \lambda'' \\ & = (\ddot\lambda + 2\dot\lambda^2 - 2\dot\lambda\dot\phi)e^{2\lambda-2\phi} + \lambda'' \\ \text{第 2 項：} & -\partial_r(\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi) = -\phi'' - \lambda'' - 2\chi''/\chi + 2\chi'^2/\chi^2 \\ \text{第 3 項：} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{rr} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{rr} \\ & = (\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi)\dot\lambda e^{2\lambda-2\phi} + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\lambda' \\ \text{第 4 項：} & -\Gamma^\mu{}_{tr}\Gamma^t{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{rr}\Gamma^r{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\mu} - \Gamma^\mu{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{r\mu} \\ & = -(\Gamma^t{}_{tr}\Gamma^t{}_{rt} + \Gamma^r{}_{tr}\Gamma^t{}_{rr}) - (\Gamma^t{}_{rr}\Gamma^r{}_{rt} + \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{rr}) \\ & \quad -\Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} \\ & = -\phi'^2 - 2\dot\lambda^2 e^{2\lambda-2\phi} - \lambda'^2 - 2\chi'^2/\chi^2 \end{cases} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \quad R_{rr} = -\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \frac{2\chi''}{\chi} + \left(\ddot\lambda + \dot\lambda^2 - \dot\lambda\dot\phi + \frac{2\dot\chi\dot\lambda}{\chi}\right)e^{2\lambda-2\phi} \tag{16}$$

解 (2.6)

$$R_{r\theta} = \underbrace{\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{r\theta}}_{=0} - \underbrace{\partial_\theta \Gamma^\mu{}_{r\mu}}_{=0} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{r\theta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{r\mu}$$
$$= \Gamma^\mu{}_{\theta\mu}\Gamma^\theta{}_{r\theta} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{t\theta}\Gamma^t{}_{r\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{r\theta}\Gamma^r{}_{r\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{r\mu}}_{=0} - \Gamma^\mu{}_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi{}_{r\mu}$$
$$= \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{r\theta} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \frac{\dot\chi}{\chi}\cot\theta - \frac{\dot\chi}{\chi}\cot\theta = 0. \tag{17}$$

解 (2.7)

$$R_{r\varphi} = \underbrace{\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{r\varphi}}_{=0} - \underbrace{\partial_\varphi \Gamma^\mu{}_{r\mu}}_{=0} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{r\varphi} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\varphi}\Gamma^\gamma{}_{r\mu}$$
$$= \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\varphi\mu}}_{=0}\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{t\varphi}\Gamma^t{}_{r\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{r\varphi}\Gamma^r{}_{r\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{r\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi{}_{r\mu}}_{=0} = 0 \tag{18}$$

解 (2.8)

$$R_{\theta\theta} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\mu{}_{\theta\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{\theta\theta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{\theta\mu} \tag{19}$$

$$
\begin{cases}
\text{第 1 項：} & \partial_t \Gamma^t{}_{\theta\theta} + \partial_r \Gamma^r{}_{\theta\theta} = \partial_t(\dot\chi\chi e^{-2\phi}) - \partial_r(\chi'\chi e^{-2\lambda}) \\
& = (\ddot\chi\chi + \dot\chi^2 - 2\dot\phi\dot\chi\chi)e^{-2\phi} - (\chi''\chi + \chi'^2 - 2\lambda'\chi'\chi)e^{-2\lambda} \\
\text{第 2 項：} & -\partial_\theta \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = -\partial_\theta \cot\theta = 1/\sin^2\theta \\
\text{第 3 項：} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{\theta\theta} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{\theta\theta} \\
& = (\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi)\dot\chi\chi e^{-2\phi} - (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\chi'\chi e^{-2\lambda} \\
\text{第 4 項：} & -\Gamma^\mu{}_{t\theta}\Gamma^t{}_{\theta\mu} - \Gamma^\mu{}_{r\theta}\Gamma^r{}_{\theta\mu} - \Gamma^\mu{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta\mu} - \Gamma^\mu{}_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi{}_{\theta\mu} \\
& = -\Gamma^\theta{}_{t\theta}\Gamma^t{}_{\theta\theta} - \Gamma^\theta{}_{r\theta}\Gamma^r{}_{\theta\theta} - (\Gamma^t{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta t} + \Gamma^r{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{\theta r}) - \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} \\
& = -2\dot\chi^2 e^{-2\phi} + 2\chi'^2 e^{-2\lambda} - \cot^2\theta
\end{cases}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ R_{\theta\theta} = {} & (\ddot\chi\chi + \dot\chi^2 - \dot\phi\dot\chi\chi + \dot\lambda\dot\chi\chi)e^{-2\phi} \\
& - (\chi''\chi + \chi'^2 - \lambda'\chi'\chi + \phi'\chi'\chi)e^{-2\lambda} + 1
\end{aligned}
\tag{21}
$$

解 (2.9)

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\varphi} &= \underbrace{\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\theta\varphi}}_{=0} - \underbrace{\partial_\varphi \Gamma^\mu{}_{\theta\mu}}_{=0} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{\theta\varphi} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\varphi}\Gamma^\gamma{}_{\theta\mu} \\
&= \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\varphi\mu}}_{=0}\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{t\varphi}\Gamma^t{}_{\theta\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{r\varphi}\Gamma^r{}_{\theta\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^\mu{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{\theta\mu}}_{=0} = 0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

解 (2.10)

$$
R_{\varphi\varphi} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\varphi\varphi} - \underbrace{\partial_\varphi \Gamma^\mu{}_{\varphi\mu}}_{=0} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{\varphi\varphi} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\varphi}\Gamma^\gamma{}_{\varphi\mu}
\tag{23}
$$

$$
\begin{cases}
\text{第 1 項：} & \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\varphi\varphi} = \partial_t \Gamma^t{}_{\varphi\varphi} + \partial_r \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} + \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} \\
& = \partial_t(\dot\chi\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta) - \partial_r(\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta) - \partial_\theta(\sin\theta\cos\theta) \\
\text{第 3 項：} & \Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{\varphi\varphi} + \Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} + \Gamma^\mu{}_{\theta\mu}\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} \\
& = (\dot\phi + \dot\lambda + 2\dot\chi/\chi)\dot\chi\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta \\
& \qquad -(\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta - \cot\theta\sin\theta\cos\theta \\
\text{第 4 項：} & -\Gamma^\mu{}_{t\varphi}\Gamma^t{}_{\varphi\mu} - \Gamma^\mu{}_{r\varphi}\Gamma^r{}_{\varphi\mu} - \Gamma^\mu{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{\varphi\mu} - \Gamma^\mu{}_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi{}_{\varphi\mu} \\
& = -\Gamma^\varphi{}_{t\varphi}\Gamma^t{}_{\varphi\varphi} - \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} - \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} \\
& \qquad -(\Gamma^t{}_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi{}_{\varphi t} + \Gamma^r{}_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi{}_{\varphi r} + \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}) \\
& = -2\dot\chi^2 e^{-2\phi}\sin^2\theta + 2\chi'^2 e^{-2\lambda}\sin^2\theta + 2\cot\theta\sin\theta\cos\theta
\end{cases}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ R_{\varphi\varphi} = {} & (\ddot\chi\chi + \dot\chi^2 - \dot\phi\dot\chi\chi + \dot\lambda\dot\chi\chi)e^{-2\phi}\sin^2\theta \\
& - (\chi''\chi + \chi'^2 - \lambda'\chi'\chi + \phi'\chi'\chi)e^{-2\lambda}\sin^2\theta + \sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{25}
$$

解 (2.11) 今までの結果より 0 でない成分は

$$\begin{cases} R_{tt} = -\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + \dot{\phi}\dot{\lambda} + \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} - \dfrac{2\ddot{\chi}}{\chi} \\ \qquad\qquad + \left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \dfrac{2\chi'\phi'}{\chi}\right) e^{2\phi-2\lambda} \\ R_{tr} = \dfrac{2}{\chi}(\dot{\chi}\phi' + \dot{\lambda}\chi' - \dot{\chi}') \\ R_{rr} = -\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' + \dfrac{2\chi'\phi'}{\chi} - \dfrac{2\chi''}{\chi} \\ \qquad\qquad + \left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\phi} + \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right) e^{2\lambda-2\phi} \\ R_{\theta\theta} = (\ddot{\chi}\chi + \dot{\chi}^2 - \dot{\phi}\dot{\chi}\chi + \dot{\lambda}\dot{\chi}\chi)e^{-2\phi} \\ \qquad\qquad -(\chi''\chi + \chi'^2 - \lambda'\chi'\chi + \phi'\chi'\chi)e^{-2\lambda} + 1 \\ R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} \end{cases} \tag{26}$$

したがって、

$$A = \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\phi}\dot{\lambda}, \quad B = -\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' \tag{27}$$

とおけば、

$$\begin{cases} R^t{}_t = \left(A - \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} + \dfrac{2\ddot{\chi}}{\chi}\right) e^{-2\phi} + \left(B - \dfrac{2\chi'\phi'}{\chi}\right) e^{-2\lambda} \\ R^r{}_r = \left(B + \dfrac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \dfrac{2\chi''}{\chi}\right) e^{-2\lambda} + \left(A + \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right) e^{-2\phi} \\ R^\theta{}_\theta = R^\varphi{}_\varphi = \left(\dfrac{\ddot{\chi}}{\chi} + \dfrac{\dot{\chi}^2}{\chi^2} - \dfrac{\dot{\phi}\dot{\chi}}{\chi} + \dfrac{\dot{\lambda}\dot{\chi}}{\chi}\right) e^{-2\phi} \\ \qquad\qquad - \left(\dfrac{\chi''}{\chi} + \dfrac{\chi'^2}{\chi^2} - \dfrac{\lambda'\chi'}{\chi} + \dfrac{\phi'\chi'}{\chi}\right) e^{-2\lambda} + \dfrac{1}{\chi^2} \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} R = R^\mu{}_\mu = 2&\left(A - \frac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} + \frac{2\ddot{\chi}}{\chi} + \frac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi} + \frac{\dot{\chi}^2}{\chi^2}\right) e^{-2\phi} \\ &+ 2\left(B + \frac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \frac{2\chi''}{\chi} - \frac{2\chi'\phi'}{\chi} - \frac{\chi'^2}{\chi^2}\right) e^{-2\lambda} + \frac{2}{\chi^2}. \end{aligned} \tag{29}$$

解 (2.12) 今までの結果より

$$
\begin{cases}
G^t{}_t = -\left(\dfrac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi} + \dfrac{\dot{\chi}^2}{\chi^2}\right)e^{-2\phi} + \left(\dfrac{2\chi''}{\chi} + \dfrac{\chi'^2}{\chi^2} - \dfrac{2\chi'\lambda'}{\chi}\right)e^{-2\lambda} - \dfrac{1}{\chi^2} \\
G^t{}_r = \dfrac{2e^{-2\phi}}{\chi}(\dot{\chi}' - \dot{\chi}\phi' - \dot{\lambda}\chi') \\
G^r{}_r = \left(\dfrac{2\chi'\phi'}{\chi} + \dfrac{\chi'^2}{\chi^2}\right)e^{-2\lambda} - \left(\dfrac{2\ddot{\chi}}{\chi} + \dfrac{\dot{\chi}^2}{\chi^2} - \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi}\right)e^{-2\phi} - \dfrac{1}{\chi^2} \\
G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi = R^\theta{}_\theta - \dfrac{R}{2} = -\dfrac{1}{2}(R^t{}_t + R^r{}_r) \\
\qquad = -\left(A - \dfrac{\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} + \dfrac{\ddot{\chi}}{\chi} + \dfrac{\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right)e^{-2\phi} - \left(B - \dfrac{\chi'\phi'}{\chi} + \dfrac{\chi'\lambda'}{\chi} - \dfrac{\chi''}{\chi}\right)e^{-2\lambda} \\
\qquad = -\left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\phi}\dot{\lambda} - \dfrac{\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} + \dfrac{\ddot{\chi}}{\chi} + \dfrac{\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right)e^{-2\phi} \\
\qquad\qquad + \left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \dfrac{\chi'\phi'}{\chi} - \dfrac{\chi'\lambda'}{\chi} + \dfrac{\chi''}{\chi}\right)e^{-2\lambda}
\end{cases}
\tag{30}
$$

これ以外の成分は 0 である。