

第3章 重力波

3.1 アインシュタイン方程式の弱場近似

弱い重力場：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3.1.1)$$

の場合に限定して考えることにする¹。したがって、

$$g_{\mu\nu}(\text{時空}) = \eta_{\mu\nu}(\text{不変な媒質} = \text{容れ物}) + h_{\mu\nu}(\text{変化する媒体} = \text{時空の波動}) \quad (3.1.2)$$

という描像が可能になる。

以下、アインシュタイン方程式を $h_{\mu\nu}$ に関して線形化したものを計算してみよう。まず、クリストッフェル記号は

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &\equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}) \\ &\equiv \frac{1}{2}(h^\alpha_{\beta,\gamma} + h^\alpha_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}{}^\alpha) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

となる。ここで、 $h_{\mu\nu}$ 自身は厳密な意味でのテンソルではないので、その添字の上げ下げはまだ定義されていない。そこで、一般のテンソルと同じく $g_{\mu\nu}$ によって上げ下げを行うものとする、 $h_{\mu\nu}$ に関する1次の項までを考える限り、 $\eta_{\mu\nu}$ を用いた結果でよいことになる。したがって、(3.1.3)式では、 $h^\alpha_{\beta,\gamma} \equiv \eta^{\alpha\mu}h_{\mu\beta,\gamma}$ のように定義した。以下もこの定義を用いる。

同様にリッチテンソルを計算すると、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \underbrace{\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\gamma} - \Gamma^\gamma_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\gamma}}_{=O(h^2)} \\ &\approx \frac{1}{2}[(h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - h_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\alpha) - (h^\alpha_{\mu,\alpha\nu} + h^\alpha_{\alpha,\mu\nu} - h_{\nu\alpha}{}^\alpha{}_\nu)] \end{aligned}$$

¹(3.1.1) 式は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

の高次項を無視した近似式であるという立場と、

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$$

によって $h_{\mu\nu}$ を定義したものとする立場の二つがあり得る。事実上はこの両者でほとんど違いはないのであえて意識する必要はないが、理論的定式化において解釈が異なる場合もある(例えば、重力場のエネルギー運動量擬テンソル)ので注意が必要である。

$$= \frac{1}{2}(h^\alpha{}_{\nu,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha,{}^\alpha\nu} - h_{\mu\nu,{}^\alpha\alpha} - h_{,\mu\nu}). \quad (3.1.4)$$

ここで、 h は $h_{\mu\nu}$ のトレイス：

$$h \equiv h^\alpha{}_\alpha \equiv \eta^{\alpha\mu} h_{\alpha\mu} \quad (3.1.5)$$

である。(3.1.4) 式を縮約するとスカラー曲率は、

$$R = R^\beta{}_\beta \approx \frac{1}{2}(h^\alpha{}_{\beta,{}^\beta\alpha} + h^{\beta\alpha,{}^\alpha\beta} - h^{\beta\beta,{}^\alpha\alpha} - h^{\beta,{}^\beta}) = h_{\alpha\beta,{}^\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^\beta. \quad (3.1.6)$$

以上を組み合わせてアインシュタインテンソルを書き下す。まず、

$$2G_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = h_{\mu\alpha,{}^\alpha\nu} + h_{\nu\alpha,{}^\alpha\mu} - h_{\mu\nu,{}^\alpha\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta,{}^\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^\beta). \quad (3.1.7)$$

ここで、

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (3.1.8)$$

を定義すると、

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^\mu{}_\mu = h^\mu{}_\mu - \frac{1}{2} \times 4h = -h \quad (3.1.9)$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \quad (3.1.10)$$

これを用いて (3.1.7) 式を書き直すと

$$2G_{\mu\nu} = \underbrace{-\bar{h}_{\mu\nu,{}^\alpha\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,{}^\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,{}^\alpha\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha,{}^\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\bar{h}_{,\nu}{}^\alpha - \frac{1}{2}\eta_{\nu\alpha}\bar{h}_{,\mu}{}^\alpha + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}_{,\alpha}{}^\alpha + \bar{h}_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{,\beta}{}^\beta\right)}_{=0}. \quad (3.1.11)$$

さらに、座標系の選びかたの 4 自由度を用いて以下の座標条件 (ゲージ条件)：

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad (3.1.12)$$

を採用する。具体的に $x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu$ とおくと (ただし $\xi^\mu \ll x^\mu$ とする)、

$$\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \approx (\delta^\alpha{}_\mu - \xi^\alpha{}_{,\mu})(\delta^\beta{}_\nu - \xi^\beta{}_{,\nu})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}). \quad (3.1.13)$$

したがって、

$$h'_{\mu\nu} \approx h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,{}^\nu} - \xi_{\nu,{}^\mu}, h' \approx h - 2\xi^{\mu,{}^\mu} \Rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,{}^\nu} - \xi_{\nu,{}^\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi_{\beta,{}^\beta}. \quad (3.1.14)$$

これらより、

$$\bar{h}'^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} - \xi^{\mu,{}^\alpha}{}_{,\alpha} + \underbrace{\eta^{\mu\alpha}\xi_{\beta,{}^\beta}{}_{,\alpha} - \xi^{\alpha,{}^\mu}{}_{,\alpha}}_{=0} \quad (3.1.15)$$

となるので、

$$\square \xi^\mu = -\frac{\partial \bar{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} \quad (3.1.16)$$

となるような ξ^μ を選べば、一般性を失うことなくゲージ条件 (3.1.12) 式を課せることがわかる。

結局 アインシュタイン方程式は

$$2G_{\mu\nu} = 16\pi GT_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad -\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = -\square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.1.17)$$

という波動方程式に帰着する。その解は形式的に

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{ret})} + \bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{in})} \quad (3.1.18)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{ret})} = 4G \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \quad (3.1.19)$$

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{in})} = 0 \quad (3.1.20)$$

と書ける。この光速で伝搬する波動解を重力波と呼ぶ。

3.2 重力波の平面波解

真空中を伝搬する重力波：

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.2.1)$$

の単色平面波解：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (3.2.2)$$

を具体的に求めてみよう ($a_{\mu\nu}$ は偏光テンソル)。この $\bar{h}_{\mu\nu}$ は複素数であるが、電磁場 A^μ の場合などと同様に、実際にはその実部をとることを注意しておく。

まず、

$$\bar{h}_{\mu\nu} \text{ は対称テンソル： } a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (3.2.3)$$

$$\text{ゲージ条件 (3.1.12) 式： } a_{\mu\alpha} k^\alpha = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\text{波動方程式 (3.2.1) 式： } k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (3.2.5)$$

より、 $a_{\mu\nu}$ は $10 - 4 = 6$ の独立な自由度を持つように思えるが、実は本当は 2 自由度しかない。これは (3.1.16) 式からもわかるように、(3.1.12) 式を満たすように選んだ ξ^μ に $\square \chi^\mu = 0$ を満たす χ^μ (これも無限小量であるとする) を付け加える自由度が残っているからである。(3.1.14) 式と (3.1.15) 式において、 $\xi^\mu \rightarrow \xi^\mu + \chi^\mu$ とおいた式を再度書いてみれば、

$$\bar{h}''_{\mu\nu} = \bar{h}'_{\mu\nu} - \chi_{\mu,\nu} - \chi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \chi_{\beta}{}^{\beta}, \quad (3.2.6)$$

$$\bar{h}''^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \bar{h}'^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} - \chi^{\mu,\alpha}{}_{,\alpha}. \quad (3.2.7)$$

したがって、 $\square\chi^\mu = 0$ をみたま限り、 χ^μ の自由度の存在はゲージ条件 (3.1.12) 式には影響しない。

より具体的に

$$\chi^\mu = -ic^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (c^\mu \text{は定数}) \quad (3.2.8)$$

と置くと、 $\square\chi^\mu = 0$ は満たされ、かつ (3.2.6) 式より

$$a_{\mu\nu} \rightarrow a_{\mu\nu} - c_\mu k_\nu - c_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu} c^\beta k_\beta \quad (3.2.9)$$

となる。この式からも $a_{\mu\nu}$ の 6 自由度のうち 4 つはこのゲージ自由度に対応していることがわかる。したがって、重力波の本当の自由度は $10-4-4=2$ ということになる。

以上の議論をふまえて、重力波の振幅 $h_{\mu\nu}$ の 10 個の成分に対して次の 8 つの条件を課すことがよく行われ、これを TT (Transverse - Traceless) ゲージと呼ぶ。

$$h_{\mu 0} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{空間成分のみ} \quad (3.2.10)$$

$$h_{ij}{}^{,j} = 0 \quad \leftrightarrow \quad k_l \text{方向に進む波を考えると } h_{il} = 0 \text{(進行方向と直交 transverse)} \quad (3.2.11)$$

$$h^j{}_j = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{traceless } (\bar{h}_{ij} \text{ と } h_{ij} \text{ は同じ}) \quad (3.2.12)$$

具体的に z 方向に進む単色平面波：

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = a_{\mu\nu} \exp[-iw(t-z)] \quad (3.2.13)$$

を考えてみる。(3.2.10) 式 ~ (3.2.12) 式は、

$$a_{\mu 0} = 0, \quad a_{i3} = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 0 \quad (3.2.14)$$

となるので、

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv a^+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a^\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

に帰着する。

具体的に、(3.2.15) 式のような成分を持つ重力波 (3.2.13) が z 方向から入射したとすると、ミンコフスキー時空の空間的線素は

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx^i dx^j \\ \Rightarrow dl^2 &= (\delta_{ij} + h_{ij}^{\text{TT}}) dx^i dx^j \\ &= [1 + a^+ \cos w(t-z)] dx^2 + [1 - a^+ \cos w(t-z)] dy^2 + dz^2 \\ &\quad + 2a^\times \cos w(t-z) dx dy \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

のように変化することになる。ただし、今まで単に h_{ij} と記して来たものは複素数表示で実際にはその実部をとるということを用いた。(3.2.16) 式を眺めると、 $w(t-z)$ の値に応じて xy 平面上での距離が、まさに + と \times という記号の示す通りの偏光モード a^+ , a^\times にしたがって変化することがわかる。

3.3 測地線偏差の方程式と重力波検出原理

近接した2点 x^μ と $x^\mu + \xi^\mu$ にある質点が何らかの外力 F_{ext}^μ を受けて運動しているものとする ($\xi^\mu \ll x^\mu$)。それらの運動方程式は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = F_{\text{ext}}^\mu(x) \quad (3.3.1)$$

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x + \xi) \frac{d(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau} \frac{d(x^\beta + \xi^\beta)}{d\tau} = F_{\text{ext}}^\mu(x + \xi). \quad (3.3.2)$$

これらの差をとって、 ξ^μ の一次まで書き下すと

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma}(x) \xi^\gamma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = f_{\text{ext}}^\mu \equiv F_{\text{ext},\nu}^\mu \xi^\nu \quad (3.3.3)$$

共変性が明白になるように、絶対微分：

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\mu_{;\beta} = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (3.3.4)$$

を用いて (3.3.3) 式を書き直すことにする。まず、

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \right) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{D\xi^\alpha}{D\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\alpha \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \xi^\alpha \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} \right) \\ &\quad + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \xi^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) \\ &= \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &\quad - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\rho\sigma} \xi^\alpha \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \xi^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + (\Gamma^\mu_{\beta\alpha,\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\nu} \Gamma^\nu_{\alpha\gamma} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \Gamma^\nu_{\beta\gamma}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

これを用いると、(3.3.3) 式は

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} + \underbrace{(\Gamma^\mu_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta})}_{=R^\mu_{\alpha\beta\gamma}} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} &= f_{\text{ext}}^\mu \\ \Rightarrow \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} + R^\mu_{\alpha\beta\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} &= f_{\text{ext}}^\mu \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

となる。なお、(3.3.6) 式の各項はそれぞれが共変性をもつベクトルとなっている。

地上の観測者に対しては近似的に

$$d\tau \approx dt, \quad \frac{dx^0}{d\tau} \approx 1, \quad \frac{dx^i}{d\tau} \approx 0 \quad (3.3.7)$$

が成り立つので、(3.3.6) 式は

$$\frac{d^2 \xi^j}{dt^2} + R^j_{0k0} \xi^k = f_{\text{ext}}^j \quad (3.3.8)$$

となる。ここで、TT ゲージでは空間成分以外は 0 なので

$$\Gamma^j_{00} \approx \frac{1}{2}(2h^j_{0,0} - h_{00}{}^{,j}) \approx 0 \quad (3.3.9)$$

$$\Gamma^j_{0k} \approx \frac{1}{2}(h^j_{0,k} + h^j_{k,0} - h_{0k}{}^{,j}) = \frac{1}{2}h^j_{k,0} \quad (3.3.10)$$

であることに注意すると、

$$R^j_{0k0} \approx \Gamma^j_{00,k} - \Gamma^j_{0k,0} + O(h^2) \approx -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^j_k}{\partial t^2}. \quad (3.3.11)$$

したがって、(3.3.8) 式は

$$\frac{d^2 \xi^j}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^{\text{TT}j}_k}{\partial t^2} \xi^k + f^j_{\text{ext}} = f^j_{\text{GW}} + f^j_{\text{ext}} \quad (3.3.12)$$

に帰着する。ここで、右辺の第一項は重力波による実効的な力であるとみなすことができる。二点間の距離 ξ^j を

$$\xi^j = \xi_0^j + \Delta \xi^j_{\text{GW}} \quad (3.3.13)$$

とにおいて、(3.3.12) 式より、重力波 $h^{\text{TT},j}_k \sim h e^{-i\omega t}$ の入射によって引き起こされる $\Delta \xi^j_{\text{GW}}$ の大きさを見積もってみる。

(i) レーザー干渉計検出器

2つのおもりを外力のない ($f^j_{\text{ext}} = 0$) 状態で遠く離し ($\xi_0 \sim 100\text{km}$)、レーザー干渉計を用いてその距離の微小変化

$$\Delta \xi_{\text{GW}} \approx 10^{-16} \left(\frac{h}{10^{-21}} \right) \left(\frac{\xi_0}{100\text{km}} \right) \text{m} \quad (3.3.14)$$

を精密測定するものである。これは、(0.1 ~ 10)kHz の広い周波数領域をカバーすることができ、現在最も有望な手法であると考えられている。

(ii) 共振型検出器

特定の振動数 w をもつ重力波に対しては、共振振動数 $w_0 (\approx w)$ をもつ弾性体の振動を利用する方法も考えられる。この場合、弾性体は重力波の外力に対応して

$$\frac{d^2 \Delta \xi_{\text{GW}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau_Q} \frac{d \Delta \xi_{\text{GW}}}{dt} + w_0^2 \Delta \xi_{\text{GW}} = -w^2 h \xi_0 \quad (3.3.15)$$

という強制振動を行う。減衰時間 τ_Q は、振動体の Q 値と共振振動数 w_0 を用いると Q/w_0 である。これから桁を見積もると、

$$\Delta \xi_{\text{GW}} \approx \left| \frac{w^2 h \xi_0}{w_0^2 - w^2 - i w_0 / \tau_Q} \right| \approx w_0 \tau_Q h \xi_0 = 10^{-15} \left(\frac{Q}{10^6} \right) \left(\frac{h}{10^{-21}} \right) \left(\frac{\xi_0}{1\text{m}} \right) \text{m} \quad (3.3.16)$$

となる。

3.4 大局的保存則と重力場のエネルギー運動量擬テンソル

一般相対論でエネルギー運動量保存則という場合には通常 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ をさすが、これは微分方程式であるからあくまで局所的なものである。つまり、それに対応する大局的な保存量の存在は必ずしも保証されない。さらにこれには、重力場自身の持つエネルギー運動量をどのように定義するかという、より深遠な問題がかかわってくる。

具体的には、

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} + \underbrace{\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}}_{=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}}} T^{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu})_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} \quad (3.4.1)$$

であるから、不変 4 次元体積要素 $\sqrt{-g} d^4x$ をかけて積分すれば

$$\int \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu})_{,\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (3.4.2)$$

仮に第 1 項だけであれば、ガウスの定理を用いて

$$\int_V (\sqrt{-g} T^{\mu\nu})_{,\nu} d^4x = \int_{\partial V} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} dS_{\nu} \quad (3.4.3)$$

と変形し、時間一定面上で積分したときに、時間に依らず保存する量を定義できるが、第 2 項の存在のためにそれができない。

つまり、大局的保存量を導くためには、 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ を、共変微分ではなく偏微分を用いた保存形、例えば

$$((-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}))_{,\nu} = 0 \text{ あるいは } (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (3.4.4)$$

といった形に変形する必要がある。つまり、共変微分のもつ重力場のエネルギー運動量をあらわに示すようなテンソル $t^{\mu\nu}$ を定義して (3.4.4) 式にできないか、という問題に帰着する。

この答えは、Yes でもあり No でもある。実際に (3.4.4) 式を満たすような $t^{\mu\nu}$ を具体的に構築できるという意味では Yes である。このような $t^{\mu\nu}$ を重力場のエネルギー運動量擬テンソルと呼ぶ。以下、具体的に 2 つの例を簡単に紹介するにとどめる。またここでは、

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (3.4.5)$$

という厳密な定義 (近似ではなく) を用いた表式であることを注意しておく。

(i) Misner, Thorne & Wheeler (1972, §20)

まず

$$H_{\text{MTW}}^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv - \left(\bar{h}^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu} \right) \quad (3.4.6)$$

という量を定義する。アインシュタインテンソルの $h^{\mu\nu}$ の一次までの項の部分を $G^{\mu\nu(1)}$ とすると

$$H_{\text{MTW},\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta} = 2G^{\mu\nu(1)} \quad (3.4.7)$$

という関係式が成り立っている。そこで、

$$t_{\text{MTW}}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi G} (G^{\mu\nu(1)} - G^{\mu\nu}) = \frac{1}{16\pi G} (H_{\text{MTW},\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta} - 2G^{\mu\nu}) \quad (3.4.8)$$

と定義すれば、 $t_{\text{MTW}}^{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソルのうち、 $h^{\mu\nu}$ の二次以上の項をまとめた量であることがわかる。この場合、アインシュタイン方程式より

$$H_{\text{MTW},\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta} = 2G^{\mu\nu} + 16\pi G t_{\text{MTW}}^{\mu\nu} = 16\pi G (T^{\mu\nu} + t_{\text{MTW}}^{\mu\nu}) \quad (3.4.9)$$

が成り立つ。 $H_{\text{MTW}}^{\mu\alpha\nu\beta}$ の ν と β についての反対称性より、

$$H_{\text{MTW},\alpha\beta\nu}^{\mu\alpha\nu\beta} = 0 \Rightarrow (T^{\mu\nu} + t_{\text{MTW}}^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (3.4.10)$$

が導ける。これは、(3.4.4) 式の 2 つめの例になっている。

(ii) Landau & Lifshitz (1972, §96)

別の例として、

$$H_{\text{LL}}^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv (-g) (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) \quad (3.4.11)$$

という選びかたもある。この場合、

$$t_{\text{LL}}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{16\pi G(-g)} (H_{\text{LL},\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta} - 2(-g)G^{\mu\nu}) = \frac{H_{\text{LL},\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta}}{16\pi G(-g)} - T^{\mu\nu} \quad (3.4.12)$$

と定義すれば

$$H_{\text{LL},\alpha\beta\nu}^{\mu\alpha\nu\beta} = 0 \Rightarrow [(-g) (T^{\mu\nu} + t_{\text{LL}}^{\mu\nu})]_{,\nu} = 0 \quad (3.4.13)$$

となり、(3.4.4) 式の最初の例になっている。(3.4.12) 式に関しては、具体的な表式が Landau & Lifshitz の場の古典論 (1972, §96) に与えられている。

$$\begin{aligned} t_{\text{LL}}^{\mu\nu} = & \frac{1}{16\pi G} [(2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^\rho_{\gamma\rho} - \Gamma^\gamma_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\beta\gamma} - \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}\Gamma^\rho_{\beta\rho}) (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}) \\ & + g^{\mu\alpha}g^{\beta\gamma} (\Gamma^\nu_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\beta\gamma} + \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\Gamma^\rho_{\alpha\rho} - \Gamma^\nu_{\gamma\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\Gamma^\rho_{\gamma\rho}) \\ & + g^{\nu\alpha}g^{\beta\gamma} (\Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\beta\gamma} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\rho_{\alpha\rho} - \Gamma^\mu_{\gamma\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\rho_{\gamma\rho}) \\ & + g^{\alpha\beta}g^{\gamma\rho} (\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\Gamma^\nu_{\beta\rho} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\gamma\rho})]. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

このように、 $t_{\mu\nu}$ は存在はするが一意的ではないことからわかるように、その量は座標系の選びかたに依存しておりテンソルではない。そもそも、等価原理を考えれば、重力場は局所的には常に消すことができるので、そのエネルギー-運動量をテンソルで表現することは原理的に不可能なのである。ただし、漸近的に平坦な時空：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1}), \quad g_{\mu\nu,\alpha} = O(r^{-2}) \quad (3.4.15)$$

に座標系を限定する限り、大局的な保存量、たとえば、

$$P_{\text{LL}}^\mu = \int (-g) (T^{\mu 0} + t_{\text{LL}}^{\mu 0}) d^3x \quad \text{あるいは} \quad P_{\text{MTW}}^\mu = \int (T^{\mu 0} + t_{\text{MTW}}^{\mu 0}) d^3x \quad (3.4.16)$$

が存在し、かつこの 2 つは等しいことが示されている。つまり、座標を制限すれば大局的に意味をもつ保存量を定義できる例となっている。

以上をまとめると、一般の時空では、局所的なエネルギー運動量保存則は常に満たされているが、それに対応した大局的な保存量は存在しない。その意味で、大局的保存量を探すことはそもそも概念的に不可能なのである。無理にでもそのような保存量を考えたいとすれば、たとえば漸近的に平坦な時空に限定するなど、座標系を制限する必要が出てくるわけである。

上述の $t_{\mu\nu}$ の定式化は厳密なものであり、 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ という近似はどこにも用いていない。しかし、ミンコフスキー時空 $\eta_{\mu\nu}$ を背景として伝搬する弱い重力波 ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) の場合に限ると、 $t_{\mu\nu}$ に対する $h_{\mu\nu}$ の 2 次までの近似式を書き下すことができる。

具体的には、(3.4.8) 式あるいは (3.4.12) 式を $h_{\mu\nu}$ に関して展開して、その最低次 (2 次) の項を求めればよい。計算はかなり面倒であるが、TT ゲージを採用し最後に考えている重力波の波長よりも十分大きなスケールで平均すると結果は簡単な表式にまとめられる。

$$\langle t^{\mu\nu} \rangle = \frac{c^4}{32\pi G} \langle h_{ij}^{\text{TT},\mu} h^{\text{TT} ij,\nu} \rangle. \quad (3.4.17)$$

これは、Isaacson の式と呼ばれている。 $\langle \rangle$ が空間平均を表すが、重力波の存在は局所的には定義できないことから、人為的ではあるがこのような非局所的な操作を導入することは必要なのである。

3.5 重力波輻射の四重極公式

Isaacson の式を用いて、ニュートン力学的な重力波源からの輻射を計算してみる。まず、弱場近似をする前の「厳密な」アインシュタイン方程式は

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi G (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) \quad (3.5.1)$$

$$\bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0 \quad (3.5.2)$$

と書ける。この $t^{\mu\nu}$ は、 $\bar{h}^{\mu\nu}$ に関する 2 次以上の高次項をすべてとりこんだものである。その遅延解は

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int \frac{[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}](t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \quad (3.5.3)$$

となる。これは、 $\bar{h}^{\mu\nu}$ に関する 2 次以上の項を無視した (3.1.18) 式とは異なり ($t^{\mu\nu}$ は $O(h^2)$ となるのでそこでは無視されていた)、 $\bar{h}^{\mu\nu}$ に関する積分方程式となっている。

重力波源となる領域の大きさを R とし、そこから $r = |\vec{x}| (\gg R)$ だけ離れた場所での重力波の振幅を考えることにする。この場合、(3.5.3) 式は

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \approx \frac{4G}{r} \int [T^{\mu\nu}(t - r, \vec{x}') + t^{\mu\nu}(t - r, \vec{x}')] d\vec{x}' \quad (3.5.4)$$

と近似できる。この式に $t_{\text{MTW}}^{\mu\nu}$ の場合に成り立つ

$$(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (3.5.5)$$

を適用して変形すれば

$$\bar{h}^{jk}(t, \vec{x}) \approx \frac{2G}{r} \frac{d^2 I^{jk}(t-r)}{dt^2} \quad (3.5.6)$$

$$I^{jk}(t-r) \approx \int T^{00}(t-r, \vec{x}') x'^j x'^k d\vec{x}' \quad (\text{質量分布の四重極モーメント}) \quad (3.5.7)$$

となる。

(3.5.6) 式は以下のようにして証明できる。まず、(3.5.5) 式を繰り返し用いて

$$(T^{00} + t^{00})_{,00} = - \left[(T^{0l} + t^{0l})_{,l} \right]_{,0} = - \left[(T^{l0} + t^{l0})_{,0} \right]_{,l} = (T^{lm} + t^{lm})_{,ml} \quad (3.5.8)$$

したがって、

$$\left[(T^{00} + t^{00}) x^j x^k \right]_{,00} = (T^{lm} + t^{lm})_{,ml} x^j x^k \quad (3.5.9)$$

となる。さらにこれを用いれば

$$\begin{aligned} \left[(T^{lm} + t^{lm}) x^j x^k \right]_{,ml} &= (T^{lm} + t^{lm})_{,ml} x^j x^k + (T^{lm} + t^{lm})_{,m} (\delta_l^j x^k + x^j \delta_l^k) \\ &\quad + (T^{lm} + t^{lm})_{,l} (\delta_m^j x^k + x^j \delta_m^k) + (T^{lm} + t^{lm}) (\delta_m^j \delta_l^k + \delta_l^j \delta_m^k) \\ &= \left[(T^{00} + t^{00}) x^j x^k \right]_{,00} + 2 \left[(T^{lj} + t^{lj}) x^k + (T^{lk} + t^{lk}) x^j \right]_{,l} \\ &\quad - 2 (T^{jk} + t^{jk}) \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

この式の両辺を体積積分すると、左辺、および右辺第 2 項はガウスの定理より表面積分に帰着し 0 となる。したがって、

$$\begin{aligned} \bar{h}^{jk}(t, \vec{x}) &\approx \frac{4G}{r} \int (T^{jk} + t^{jk}) d\vec{x}' \\ &= \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} \int [T^{00}(t-r, \vec{x}') + t^{00}(t-r, \vec{x}')] x'^j x'^k d\vec{x}' \\ &\approx \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00}(t-r, \vec{x}') x'^j x'^k d\vec{x}' = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I^{jk}(t-r)}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

となり、(3.5.6) 式が導かれた。

しかし (3.5.6) 式はまだ TT ゲージにはなっていない。そこで、TT ゲージ：

$$\bar{h}_{jk}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = h_{jk}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 \mathcal{I}_{jk}^{\text{TT}}(t-r)}{dt^2} \quad (3.5.12)$$

となるような $\mathcal{I}_{jk}^{\text{TT}}$ を求めることにする。ただしここで、 \mathcal{I}_{jk} は I_{jk} のトレースフリー成分で

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{jk}(t-r) &\equiv I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I = \int T^{00}(t-r, \vec{x}') \left(x'^j x'^k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r'^2 \right) d\vec{x}' \\ &: \text{質量分布の換算 (reduced) 四重極モーメント} \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

である。この定義から $I_{jk}^{\text{TT}} = \mathcal{I}_{jk}^{\text{TT}}$ となるが、 \mathcal{I}_{jk} はニュートンポテンシャルを展開したときに現れる係数：

$$\phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' = -\frac{GM}{r} - \frac{3G}{2r^5} \mathcal{I}_{jk} x^j x^k + \dots \quad (3.5.14)$$

そのものであるため、 I_{jk} よりも便利なのである。

(3.5.14) 式は以下のようにして導かれる。まず、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{1}{r} - x'^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} x'^j x'^k \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{r} + x'^j \frac{x_j}{r^3} + \frac{1}{2} x'^j x'^k \frac{3x_j x_k - \delta_{jk} r^2}{r^5} + \dots \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

であるから (ミンコフスキー空間なので空間成分の添字はそのまま上下できることを用いて)、

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \\ &= -\frac{G}{r} \int \rho(\vec{x}') d\vec{x}' - \frac{G x^j}{r^3} \int \rho(\vec{x}') x'_j d\vec{x}' \\ &\quad - \frac{3G}{2r^5} \int \rho(\vec{x}') x'_j x'_k \left(x^j x^k - \frac{1}{3} \delta^{jk} r^2 \right) d\vec{x}' + \dots \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

この右辺第一項の積分は重力波源の全質量 M を与える。第二項の積分は重力波源の二重極モーメント d_j を与えるが、原点を重心にとるとこの項は常に 0 とすることができる。第三項の積分は

$$\begin{aligned} \int \rho(\vec{x}') x'_j x'_k \left(x^j x^k - \frac{1}{3} \delta^{jk} r^2 \right) d\vec{x}' &= x^j x^k \int \rho(\vec{x}') \left(x'_j x'_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r'^2 \right) d\vec{x}' \\ &\equiv x^j x^k \mathcal{I}_{jk} \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

と変形できて、(3.5.13) 式で定義された質量分布の換算 (reduced) 四重極モーメント \mathcal{I}_{jk} で書き下される。以上をまとめて (3.5.14) 式を得る。

最後に TT ゲージをとる必要があるが、これは次の射影演算子

$$P_{lm} \equiv \delta_{lm} - \hat{x}_l \hat{x}_m \quad \left(\hat{x}_l \equiv \frac{x_l}{r} \right) \quad (3.5.18)$$

を用いれば良い²。つまり、

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{r} \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{r} \left(P_i^k P_j^l \ddot{\mathcal{I}}_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \right). \quad (3.5.19)$$

これを Isaacson の式 (3.4.17) に代入すると、

$$\langle t^{00} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \left\langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}^{\text{TT} ij} \right\rangle = \frac{G}{8\pi r^2} \left\langle \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{\mathcal{I}}^{\text{TT} ij} \right\rangle. \quad (3.5.20)$$

² P_{lm} は射影演算子としての以下の関係式を満たしている。

$$\begin{aligned} P_l^m P_{mn} &= (\delta_l^m - \hat{x}_l \hat{x}^m)(\delta_{mn} - \hat{x}_m \hat{x}_n) = \delta_{ln} - \hat{x}_l \hat{x}_n - \hat{x}_l \hat{x}_n + \hat{x}_l \hat{x}_n = \delta_{ln} - \hat{x}_l \hat{x}_n = P_{ln} \\ \hat{x}^l P_l^m &= \hat{x}^m - \hat{x}^m = 0 \end{aligned}$$

右辺の括弧内を計算すると

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{\mathcal{I}}^{\text{TT} ij} &= \left(P_i^k P_j^l \ddot{\mathcal{I}}_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} \underbrace{P^{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{kl}}_{=I \text{ とおく}} \right) \left(P^{ik'} P^{j'l'} \ddot{\mathcal{I}}_{k'l'} - \frac{1}{2} P^{ij} \underbrace{P^{k'l'} \ddot{\mathcal{I}}_{k'l'}}_{=I} \right) \\
&= P^{kk'} P^{ll'} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{k'l'} - I \underbrace{P^{k'l'} \ddot{\mathcal{I}}_{k'l'}}_{=I} + \frac{1}{4} I^2 \underbrace{P_{ij} P^{ij}}_{=P_i^i=2} \\
&= P^{kk'} P^{ll'} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{k'l'} - \frac{1}{2} I^2.
\end{aligned} \tag{3.5.21}$$

さらに

$$I = P^{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} = (\delta^{kl} - \hat{x}^k \hat{x}^l) \ddot{\mathcal{I}}_{kl} = \underbrace{\ddot{\mathcal{I}}^k_k}_{=0} - \hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \tag{3.5.22}$$

$$\begin{aligned}
P^{kk'} P^{ll'} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{k'l'} &= (\delta^{kk'} - \hat{x}^k \hat{x}^{k'}) (\delta^{ll'} - \hat{x}^l \hat{x}^{l'}) \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{k'l'} \\
&= \ddot{\mathcal{I}}^{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} - 2 \hat{x}^k \hat{x}^{k'} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{k'l} + \underbrace{(\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{\mathcal{I}}_{kl})^2}_{=I^2}
\end{aligned} \tag{3.5.23}$$

を用いれば、結局

$$\langle t^{00} \rangle = \frac{G}{8\pi r^2} \left\langle \ddot{\mathcal{I}}^{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} - 2 \hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{\mathcal{I}}_{km} \ddot{\mathcal{I}}^m_l + \frac{1}{2} (\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{\mathcal{I}}_{kl})^2 \right\rangle \tag{3.5.24}$$

が導かれる。ところで、 $\mathcal{I}_{ij}^{\text{TT}}$ は $t - r$ の関数であることに注意すると、 r 方向の重力波のエネルギーフラックスは

$$\langle t^{0r} \rangle = \frac{G}{8\pi r^2} \left\langle \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{\text{TT},0} \ddot{\mathcal{I}}^{\text{TT} ij,k} \hat{x}_k \right\rangle = -\frac{G}{8\pi r^2} \left\langle \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{\mathcal{I}}^{\text{TT} ij} \hat{x}^k \hat{x}_k \right\rangle = -\langle t^{00} \rangle. \tag{3.5.25}$$

これより、重力波のエネルギー放出率は

$$\frac{dE_{\text{GW}}}{dt} = - \int \langle t^{0r} \rangle r^2 d\Omega = \frac{G}{8\pi} \int d\Omega \left\langle \ddot{\mathcal{I}}^{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} - 2 \hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{\mathcal{I}}_{km} \ddot{\mathcal{I}}^m_l + \frac{1}{2} (\hat{x}^k \hat{x}^l \ddot{\mathcal{I}}_{kl})^2 \right\rangle \tag{3.5.26}$$

となる。ここで、

$$\int d\Omega \hat{x}^k \hat{x}^l = \frac{4\pi}{3} \delta^{kl}, \quad \int d\Omega \hat{x}^i \hat{x}^j \hat{x}^k \hat{x}^l = \frac{4\pi}{15} (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \tag{3.5.27}$$

という関係を用いれば、(3.5.26) 式は

$$\frac{dE_{\text{GW}}}{dt} = \frac{G}{8\pi} (4\pi - 2 \times \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2} \frac{4\pi}{15} \times 2) \left\langle \ddot{\mathcal{I}}^{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \right\rangle = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{\mathcal{I}}^{kl} \ddot{\mathcal{I}}_{kl} \right\rangle \tag{3.5.28}$$

となる。この結果は、重力波放射の4重極公式として知られている。この結果からオーダーだけを見積もると

$$\frac{dE_{\text{GW}}}{dt} \sim \frac{G}{c^5} \left(\frac{MR^2}{T^3} \right)^2 \sim \underbrace{\frac{c^5}{G}}_{\approx 3.6 \times 10^{59} \text{ erg/s}} \left(\frac{GM}{Rc^2} \right)^2 \left(\frac{R}{T} \right)^6 \tag{3.5.29}$$

となる。右辺の 2 つの因子はいずれもとても小さい。例えば、同質量 M をもつ 2 質点が互いにケプラー運動しているとすれば

$$\begin{aligned} 2GM &\approx \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^3 \\ \Rightarrow \frac{dE_{\text{GW}}}{dt} &\sim 10^{26} L_{\odot} \left(\frac{GM}{c^3 T}\right)^{10/3} \sim 10^{-7} L_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{10/3} \left(\frac{10 \text{ 時間}}{T}\right)^{10/3} \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

となり、重力波放出の小ささがわかる。

第4章 重力レンズ天文学

4.1 重力レンズとは

遠方の天体からの光は我々に到達するまでに、宇宙の非一様な物質分布の影響でその経路が複雑に弯曲する。これは重力のために空間が歪む効果であり、重力レンズと呼ばれる。これは遠方天体自身が観測目的である場合には、その信号に対する雑音の役割をする。一方、遠方天体の光を用いて、経路にある物質分布を探るという立場ではそれ自身が重要な宇宙の情報源=信号となる。天文学は光輝く天体を観測するのが普通であるが、それらが受けた重力の影響を通じて(必ずしも光ってはいない)物質の分布までも知ることができるのが重力レンズ天文学のユニークな点である。

重力レンズはその特徴に応じて次の3つに分類される。

- (i) 強い重力レンズ:
- (ii) 弱い重力レンズ:
- (iii) 重力マイクロレンズ:

4.2 レンズ方程式

重力レンズの基本方程式であるレンズ方程式は、形式的には簡単に導くことができる。図4.1のように観測者O、ソース天体S、レンズ像IあるいはI'の位置を定義する。重力レンズを引き起こすレンズ天体Lはレンズ面上にだけ局在しており、光線はこの平面を通るときにだけ瞬間的に角度 α だけ曲げられるものとする(薄いレンズの近似: thin lens approximation)。ソース面上での角度の原点L'の位置は任意に選んでよいが、とりあえずレンズ天体の中心の位置をソース面に延長した場所に設定すると考えておけば良い。

ここで $\vec{L'O}$ 向きの単位ベクトルを $\hat{\delta}$ とし、2次元角度ベクトル θ_1 と θ_s を

$$\vec{LI} \equiv D_{OL}\theta_1, \quad \vec{L'S} \equiv D_{Os}\theta_s \quad (4.2.1)$$

によって定義する¹。このとき、光線の曲がり角ベクトル α が分かっているならば図4.1から明らかのように

$$\vec{SL'} + \vec{L'I'} = \vec{SI'} \Rightarrow D_{Os}(\theta_1 - \theta_s) = D_{Ls}\alpha \quad (4.2.2)$$

が成り立つ。これがレンズ方程式である。

¹もちろん直接観測できるのは θ_1 だけであり(一般には複数個ある)、 θ_s は観測できない。

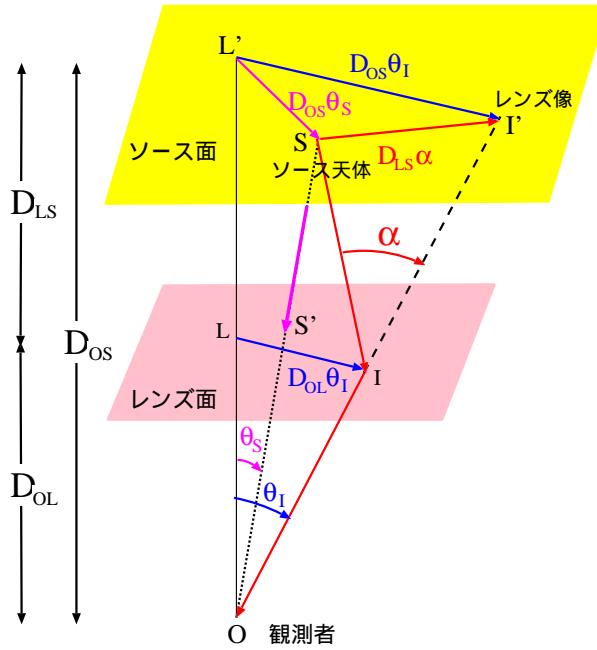


図 4.1: 重力レンズの概念図。

4.3 光線の曲がり角

4.3.1 重力場中で光線が曲がる理由

(4.2.2) 式は $\theta_l = \theta_l(\theta_s)$ を与えるものであるが、むろんこのままでは解くことができない。そのためには、光線の曲がり角 α を θ_l の関数として計算しておく必要がある。そこでレンズ面上での物質分布と α との関係を求めてみる。

コンパクト天体のごく近傍を考えない限り、弱場近似のもとでの計量:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \equiv -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)d\ell^2 \quad (4.3.1)$$

を用いれば十分である。ここで $\phi (< 0)$ はニュートンポテンシャルで、 $|\phi| \ll 1$ かつ時間には依存しないものとしておく。

重力場のもとで光が曲がる理由は以下のように定性的に理解できる。まず (4.3.1) 式の計量中を伝播する光の経路はヌルであるから、無限遠にいる観測者に対する光の「座標速度」は

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{d\ell}{dt} = \sqrt{\frac{1 + 2\phi}{1 - 2\phi}} \quad (4.3.2)$$

となる。これを通常の光学に対応させれば、屈折率

$$n \equiv \sqrt{\frac{1 + 2\phi}{1 - 2\phi}} \approx 1 - 2\phi (> 1) \quad (4.3.3)$$

の媒質中の光速 $c' = c/n$ とみなすことができる。図 4.2 に示すように、レンズ天体に近いほど屈折率は高くなるので光速 c' は小さくなる。したがって、レンズ天体の周辺を進む

光線束はレンズ天体に近いほど遅く進むため、等位相面が傾く。この光線束の進路は等位相面の法線方向であるから、図 4.2 に示すよう光線が曲がることになる。もちろん、光もまた重力を感じてレンズ天体の側に引き寄せられるという言い方も可能であるが、一般相対論は「重力は力ではない」という思想であるから、時空が歪むことによって実効的な屈折率が生じ、その結果光の測地線が曲がる、という上述の解釈の方がより適切かも知れない。

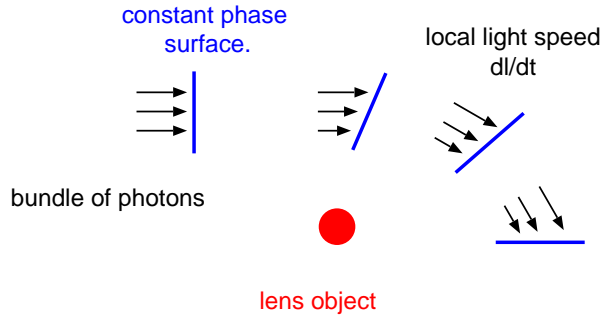


図 4.2: 重力場のもとでの光線の湾曲。

4.3.2 重力ポテンシャルと光線の曲がり角

次に、(4.3.1) 式の計量のもとでの曲がり角に対する具体的な表式を求めてみよう。光の 4 元波数ベクトルが

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (4.3.4)$$

となるようにアフィンパラメータ λ を定義して光の測地線を書き直すと

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0. \quad (4.3.5)$$

図 4.3 のように座標系を設定する。光はソース天体を出発して観測者に到達するが、ここでは観測者を原点として逆の経路を考えることにする。むろんこれらは軌跡としては同じである。重力の効果を無視すれば光の経路は \vec{OI} という直線となる。この測地線に対応する波数ベクトルは

$$k_0^\mu \approx (-1, \theta_{1,x}, \theta_{1,y}, 1) \quad (|\theta_i| \ll 1) \quad (4.3.6)$$

で与えられる。そこで、実際の測地線に対する波数ベクトルを

$$k^\mu(\lambda) = k_0^\mu + \delta k^\mu(\lambda) \quad (|\delta k^\mu(\lambda)| \ll 1) \quad (4.3.7)$$

とにおいて、(4.3.5) 式を満たす $\delta k^\mu(\lambda)$ を摂動的に計算する。

(4.3.5) 式を摂動の最低次までとると $i = 1$ または 2 として

$$\frac{d}{d\lambda}(\delta k^i) + \Gamma^i_{\alpha\beta} k_0^\alpha k_0^\beta = \frac{d}{d\lambda}(\delta k^i) + \Gamma^i_{00} + \Gamma^i_{33} = 0. \quad (4.3.8)$$

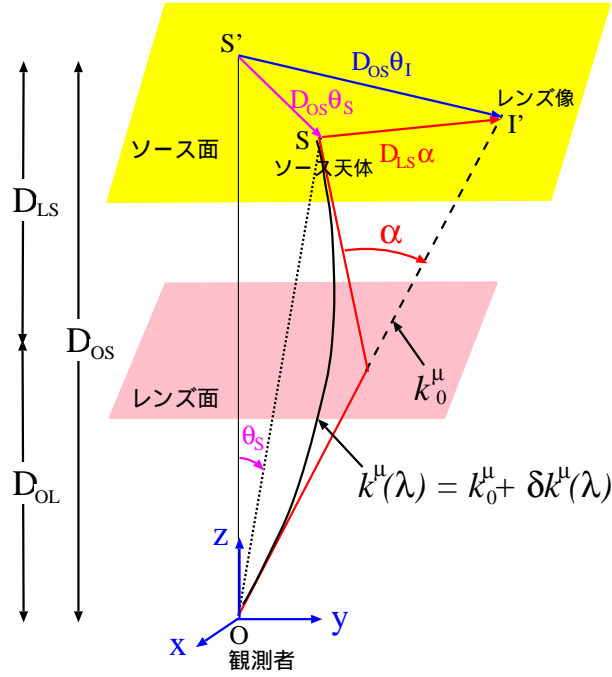


図 4.3: 光の測地線と重力レンズ。

ここで、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とすると弱場近似 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ の場合

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} \approx \frac{\eta^{ij}}{2} (h_{j\alpha,\beta} + h_{j\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,j}) \quad (4.3.9)$$

なので静的な場合

$$\Gamma^i_{00} = \Gamma^i_{33} \approx -\frac{1}{2} h_{00,i} = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}. \quad (4.3.10)$$

したがって (4.3.8) 式の解は

$$\delta k^i(\lambda) \approx -2 \int_0^\lambda \frac{\partial\phi}{\partial x^i} d\lambda' \quad (4.3.11)$$

となる。

これを測地線に沿って積分すればソース天体の座標が得られる。

$$\begin{aligned} \underbrace{x^i(\lambda_s)}_{\equiv D_{OS}\theta_s^i} &= \int_0^{\lambda_s} k^i(\lambda) d\lambda = \int_0^{\lambda_s} [k_0^i + \delta k^i(\lambda)] d\lambda \\ &= \underbrace{\int_0^{\lambda_s} \theta_s^i d\lambda}_{\equiv D_{OS}\theta_s^i} - 2 \underbrace{\int_0^{\lambda_s} d\lambda \left(\int_0^\lambda \frac{\partial\phi}{\partial x^i} d\lambda' \right)}_{\equiv D_{LS}\alpha^i}. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

これはまさにレンズ方程式 (4.2.2) であり、曲がり角 α が、測地線に沿った重力ポテンシャルの積分：

$$\alpha^i = \frac{2}{D_{LS}} \int_0^{\lambda_s} d\lambda \left(\int_0^\lambda \frac{\partial\phi}{\partial x^i} d\lambda' \right) \quad (4.3.13)$$

によって与えられることを示している。

4.3.3 薄いレンズ近似における曲がり角とレンズの質量面密度

$\lambda = \lambda_L$ に存在するある特定の天体だけが実質的に重力レンズに寄与することが多い。この場合には、光線はこのレンズ天体が存在する平面を通るときに不連続に角度 α だけ曲げられるものと近似して取り扱うことができる。これを薄いレンズ近似 (thin lens approximation) と呼ぶ。具体的には、

$$\theta^i(\lambda) \equiv 2 \int_0^\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i} d\lambda' \quad \underbrace{\equiv}_{\text{薄いレンズ近似}} \begin{cases} 0 & (0 < \lambda < \lambda_L) \\ \theta^i(\lambda_s) & (\lambda_L < \lambda < \lambda_s) \end{cases} \quad (4.3.14)$$

として、

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \frac{1}{D_{LS}} \int_0^{\lambda_s} \theta^i(\lambda) d\lambda = \frac{1}{D_{LS}} \int_{\lambda_L}^{\lambda_s} \theta^i(\lambda_s) d\lambda = \frac{\theta^i(\lambda_s)}{D_{LS}} \int_{\lambda_L}^{\lambda_s} d\lambda = \theta^i(\lambda_s) \\ &= 2 \int_0^{\lambda_s} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} d\lambda \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

に帰着する。仮に光が通常の粒子と同様にニュートン重力を受けて経路が変わるとすれば、図 4.3 のように z 方向に進む光の曲がり角は

$$\alpha_{\text{Newton}}^i \approx \frac{\delta v^i(\lambda_s)}{c} = \int_0^{\lambda_s} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} d\lambda \quad (4.3.16)$$

となることが期待される。これは (4.3.15) 式の半分であり、屈折率に対応する (4.3.3) 式の ϕ の係数が 2 であることに対応している。このことから、光が重力を感じるために曲がるという説明よりも、時空が光線に対する実効的な屈折率をもつという説明の方がより適切であることがわかる。

さらに重力ポテンシャルを具体的に書き下すことで、(4.3.15) 式をレンズ天体の質量密度を用いて表してみよう。物質の 3 次元質量密度を $\rho(\mathbf{r})$ とすると、

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = - \int \frac{G \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (4.3.17)$$

レンズ天体が存在する面を $z = 0$ に選び直せば、薄いレンズ近似の場合

$$\alpha^i = 2 \int_0^{\lambda_s} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} d\lambda \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2) \quad (4.3.18)$$

と置き換えてよい。(4.3.17) 式から

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = G \int \frac{x^i - x'^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (4.3.19)$$

なので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = G \int (x^i - x'^i) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (4.3.20)$$

この被積分関数に含まれている z に関する積分の項は、積分公式：

$$\int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2 \sqrt{z^2 + a^2}} \quad (a \text{ は定数}) \quad (4.3.21)$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \frac{1}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \frac{z - z'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{2}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

なので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = 2G \iint dx' dy' \frac{x^i - x'^i}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \times \int dz' \rho(x', y', z'). \quad (4.3.23)$$

ここで、2次元質量面密度：

$$\Sigma(x', y') \equiv \int dz' \rho(x', y', z') \quad (4.3.24)$$

および 角度

$$D_{\text{OL}} \boldsymbol{\theta}_1 \equiv (x, y), \quad D_{\text{OL}} \boldsymbol{\theta} \equiv (x', y') \quad (4.3.25)$$

を定義すれば、(4.3.18) 式は

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}_1) = \frac{4GD_{\text{OL}}}{c^2} \int \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \frac{\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}|^2} d\boldsymbol{\theta} \quad (4.3.26)$$

となる。これは、曲がり角をレンズ面上の質量面密度から計算する重要な公式である。

4.4 レンズポテンシャルとレンズ方程式

レンズ方程式 (4.2.2) の右辺を

$$\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_s \equiv \nabla_{\boldsymbol{\theta}_1} \Psi = \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{OS}}} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.4.1)$$

と書き直すことによって、レンズ面上でのレンズポテンシャル Ψ を定義する。曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ に対する (4.3.26) 式を用いれば

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}_1) = \frac{1}{\pi \Sigma_c} \int \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \ln |\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}| d\boldsymbol{\theta} \quad (4.4.2)$$

$$\Sigma_c \equiv \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{\text{OS}}}{D_{\text{OL}} D_{\text{LS}}} \approx 1.7 \times 10^{15} \left(\frac{1 \text{ Gpc}}{D_{\text{OL}} D_{\text{LS}} / D_{\text{OS}}} \right) M_{\odot} \text{ Mpc}^{-2} \quad (4.4.3)$$

という表式が得られる。 Σ_c は臨界面密度 (critical surface mass density) と呼ばれ、ソース天体が重力レンズを起こすためにレンズ面で必要となる典型的な面密度の値を与える。

(4.4.2) 式の積分の中は 2 次元ラプラシアンに対するグリーン関数²との畳み込みになっていることから、レンズポテンシャルは

$$\Delta_{\theta_1}^{(2)} \Psi(\theta_1) = 2 \frac{\Sigma(\theta_1)}{\Sigma_c} \quad (4.4.4)$$

を満たすことがわかる (以下では 2 次元ラプラシアンを単に Δ_{θ_1} と記す)。

実は、レンズポテンシャルは 3 次元の重力ポテンシャルを視線方向に積分した

$$\Psi(\theta_1) = 2 \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}} \int \phi dl \quad (4.4.5)$$

となっている。このことを確かめるために、2 次元ベクトル $\xi \equiv D_{OL} \theta_1$ を定義して、薄いレンズ近似のもとで (4.4.5) 式を微分すれば

$$\nabla_{\theta_1} \Psi(\theta_1) = 2 \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}} D_{OL} \int \nabla_{\xi} \phi dl \quad \underbrace{=}_{(4.3.15) \text{ 式}} 2 \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha = \frac{1}{\pi \Sigma_c} \int \Sigma(\theta) \frac{\theta_1 - \theta}{|\theta_1 - \theta|^2} d\theta \quad (4.4.6)$$

及び

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta_1} \Psi(\theta_1) &= 2 \frac{D_{LS} D_{OL}}{D_{OS}} \int \Delta_{\xi} \phi dl = 2 \frac{D_{LS} D_{OL}}{D_{OS}} \int \left(\Delta_{\xi}^{(3)} \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell^2} \right) dl \\ &= 2 \frac{D_{LS} D_{OL}}{D_{OS}} \left(\underbrace{\int 4\pi G \rho dl}_{=4\pi G \Sigma(\theta_1)} - \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \ell} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{\text{thinlens 近似では 0}} \right) = 2 \frac{\Sigma(\theta_1)}{\Sigma_c} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

が証明できる。これらはそれぞれ (4.4.1) 式と (4.4.4) 式に一致している。

特に円対称レンズ、すなわち $\Sigma(\theta) = \Sigma(|\theta|)$ の場合には θ_1 内にあるレンズ天体の全射影質量

$$\widetilde{M}(< \theta_1) = \int_0^{\theta_1} 2\pi \theta \Sigma(\theta) d\theta \quad (4.4.8)$$

を定義すれば、(4.4.4) 式は

$$\Delta_{\theta_1} \Psi(\theta_1) = 2 \frac{\Sigma(\theta_1)}{\Sigma_c} = \frac{1}{\pi \Sigma_c \theta_1} \frac{d\widetilde{M}(< \theta_1)}{d\theta_1} \quad (4.4.9)$$

と書き換えられる。ここで

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_1} \left(\frac{\theta_1}{\theta_1^2} \widetilde{M}(< \theta_1) \right) &= \frac{2}{\theta_1^2} \widetilde{M}(< \theta_1) - 2 \frac{\theta_1 \cdot \theta_1}{\theta_1^4} \widetilde{M}(< \theta_1) + \frac{1}{\theta_1^2} \theta_1 \cdot \nabla_{\theta_1} \widetilde{M}(< \theta_1) \\ &= \frac{1}{\theta_1^2} \theta_1 \cdot \nabla_{\theta_1} \widetilde{M}(< \theta_1) = \frac{1}{\theta_1^2} \left(\frac{2\theta_{11}^2}{2\theta_1} + \frac{2\theta_{12}^2}{2\theta_1} \right) \frac{d}{d\theta_1} \widetilde{M}(< \theta_1) \\ &= \frac{1}{\theta_1} \frac{d\widetilde{M}(< \theta_1)}{d\theta_1} \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

² 2次元では

$$\Delta_{\theta}^{(2)} \ln |\theta - \theta'| = 2\pi \delta_D^{(2)}(\theta - \theta')$$

が成り立つ。

であるから、(4.4.9) 式を積分した結果は

$$\nabla_{\theta_1} \Psi(\theta_1) = \frac{1}{\pi \Sigma_c} \frac{\theta_1}{\theta_1^2} \widetilde{M}(< \theta_1) \quad (4.4.11)$$

となる。もちろん

$$\int \Sigma(\theta) \frac{\theta_1 - \theta}{|\theta_1 - \theta|^2} d\theta = \frac{\theta_1}{\theta_1^2} \int_0^{\theta_1} 2\pi\theta \Sigma(\theta) d\theta \quad (4.4.12)$$

という関係式を証明すれば、(4.4.11) 式は (4.4.6) 式より直接示すこともできる (例題??)。

4.5 円対称重力レンズの定性的振舞い

4.5.1 円対称レンズに対する曲がり角

円対称レンズの場合、(4.3.26) 式が

$$\alpha(\theta_1) = \frac{4GD_{\text{OL}}}{c^2} \widetilde{M}(< \theta_1) \frac{\theta_1}{\theta_1^2} \quad (4.5.1)$$

となることを導いた。具体的に 3 つの代表的な例を計算しておこう。

(i) 点レンズ 質量 M の質点がレンズ天体である場合には $\widetilde{M} = M/D_{\text{OL}}^2$ で

$$\alpha(\theta_1) = \frac{4GM}{c^2 D_{\text{OL}}} \frac{\theta_1}{\theta_1^2}. \quad (4.5.2)$$

(ii) 等温球レンズ

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2} \quad (4.5.3)$$

という球対称密度分布を singular isothermal sphere と呼ぶ。定数 σ_v はその中にある粒子の速度分散である。この分布の場合

$$\alpha(\theta_1) = \frac{4G\sigma_v^2}{c^2} \frac{\theta_1}{\theta_1^2}. \quad (4.5.4)$$

(iii) 有限な中心コアをもつ等温球レンズ (4.5.3) 式は $r = 0$ で発散するため中心部では現実的ではない。そこで、有限のコアを与えた

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2 + r_c^2} \quad (4.5.5)$$

を用いることがある。この場合、

$$\alpha(\theta_1) = \frac{4G\sigma_v^2}{c^2} \left(\sqrt{\theta_1^2 + \theta_c^2} - \theta_c \right) \frac{\theta_1}{\theta_1^2} \quad (\theta_c \equiv r_c/D_{\text{OL}}). \quad (4.5.6)$$

4.5.2 点レンズ解

まずレンズ天体の大きさが無視できる場合を詳しく見てみよう。レンズ方程式を

$$\theta_I - \theta_s = \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha = \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{4GM}{c^2 D_{OL} \theta_I} \equiv \frac{\theta_E^2}{\theta_I} \quad (4.5.7)$$

と変形すると、この解は

$$\theta_I^2 - \theta_s \theta_I - \theta_E^2 = 0 \Rightarrow \theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\theta_s \pm \sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2} \right) \quad (4.5.8)$$

となる。ここで、 θ_E は質量 M のレンズ天体に対するアインシュタイン半径：

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}}} \approx \left(\frac{M}{10^{11} M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{D_{OL} D_{OS}}{D_{LS}} \right)^{-1/2} \text{arcsec} \quad (4.5.9)$$

で、重力レンズの典型的な曲がり角度を与える。

図 4.4 に示しているように、点レンズに対するレンズ方程式の解は $D_{LS}\alpha/D_{OS}$ と $\theta_I - \theta_s$ の交点を考えれば直感的に理解できる。

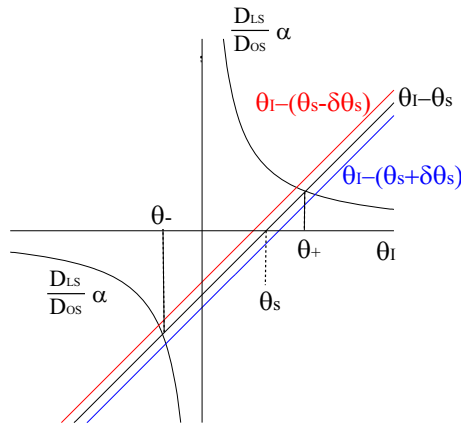


図 4.4: 点レンズに対するレンズ方程式の解。

図 4.5 にあるように、レンズ天体を中心として必ず反対側に 2 つの像ができ、

$$\theta_+ + \theta_- = \theta_s, \quad \theta_+ \theta_- = -\theta_E^2, \quad -\theta_- < \theta_E < \theta_+ \quad (4.5.10)$$

という関係がある。ソース天体がレンズ天体から大きく離れている場合 ($\theta_s \gg \theta_E$) には、 $\theta_+ = \theta_s + \theta_E^2/\theta_s$ と $\theta_- = -\theta_E^2/\theta_s$ に 2 つの像ができる。これらは基本的にはそれぞれソース天体とレンズ天体の位置である。ソース天体がレンズ天体に近づくにつれ、これらの像はいずれもソース天体とレンズ天体から離れていき、ソース天体がレンズ天体と同じ位置になると ($\theta_s = 0$)、レンズ像はその視線方向を軸とした角半径 θ_E のリングをつくる。これをアインシュタインリングと呼ぶ。宇宙論的な距離にある銀河をレンズ天体とした場合のアインシュタイン半径は約 1 秒角程度ということになる。地上の望遠鏡の角度分解能は大気揺らぎによって決まっており、ハワイ島マウナケア山頂のすばる望遠鏡では条件の良い場

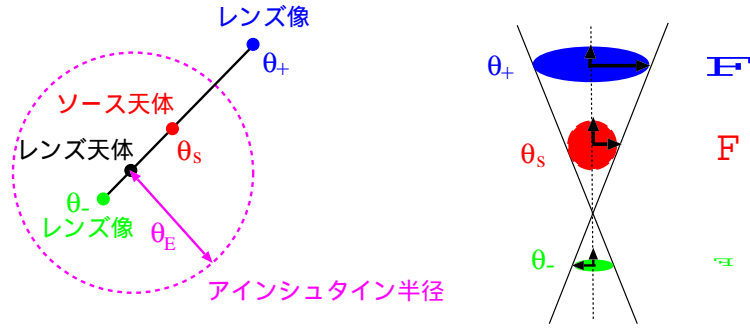


図 4.5: 点レンズに対するレンズ像とパリティ。

合で 0.6 秒角、典型的には約 1 秒角程度である。したがって、重力レンズは地上観測によって分解できる。

ソース天体が点光源（例えば星やクエーサー）ではなく、銀河のように有限なサイズを持っている場合には、レンズ像は変形する。例えばソース天体が θ_s を中心とする半径 $\delta\theta_s$ の円盤であるとする。この時、レンズ像の動径方向 (radial) の広がり

$$\delta\theta_{r,\pm} \equiv \frac{\theta_{\pm}(\theta_s + \delta\theta_s) - \theta_{\pm}(\theta_s - \delta\theta_s)}{2} \approx \frac{d\theta_{\pm}(\theta_s)}{d\theta_s} \delta\theta_s = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\theta_s}{\sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2}} \right) \delta\theta_s. \quad (4.5.11)$$

一方、図 4.5 からわかるように方位角方向 (tangential) の広がり

$$\delta\theta_{t,\pm} \approx \frac{\theta_{\pm}(\theta_s)}{\theta_s} \delta\theta_s = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2}}{\theta_s} \right) \delta\theta_s. \quad (4.5.12)$$

つまり、

$$\delta\theta_s > \delta\theta_{r,+} > \frac{1}{2}\delta\theta_s > \delta\theta_{r,-} > 0, \quad \delta\theta_{t,+} > \delta\theta_s \quad \delta\theta_{t,-} < 0 \quad (4.5.13)$$

であるが、それらの比は

$$\frac{\delta\theta_{r,\pm}}{\delta\theta_{t,\pm}} = \frac{1 \pm \theta_s/\sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2}}{1 \pm \sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2}/\theta_s} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + 4\theta_E^2/\theta_s^2}} \quad (4.5.14)$$

なので、2つのレンズ像は相似である。 $\delta\theta_{t,-} < 0$ であることは、像のパリティが負であること、すなわち θ_- 側のレンズ像は tangential 方向に反転していることを示す。また常に $|\delta\theta_{r,\pm}/\delta\theta_{t,\pm}| < 1$ であるから、レンズ像はソース天体の真の形を相対的に動径方向につぶすような変形を受ける。これらは図 4.5 に示されている。

4.5.3 有限サイズを持つ円対称レンズ解

次に、レンズ天体が有限のサイズを持つ場合を考えてみる。まず、singular isothermal sphere の場合のレンズ方程式は

$$\theta_I - \theta_s = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{\theta_I}{\theta_I} \quad (4.5.15)$$

となる。点レンズの場合のアインシュタイン半径に対応して

$$\theta_{\text{SIS}} \equiv \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{OS}}} \approx \left(\frac{\sigma_v^2}{186\text{km/s}} \right)^2 \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{OS}}} \text{arcsec} \quad (4.5.16)$$

を定義すると、図 4.6 からわかるようにレンズ方程式の解は

$$\begin{cases} \theta_+ = \theta_s + \theta_{\text{SIS}} & (\theta_s > \theta_{\text{SIS}}) \\ \theta_{\pm} = \theta_s \pm \theta_{\text{SIS}} & (\theta_s < \theta_{\text{SIS}}) \end{cases} \quad (4.5.17)$$

となる。ソース天体が遠方からレンズ天体に近づくと、最初は一つであったレンズ像が $\theta_s < \theta_{\text{SIS}}$ 以後 2 つに分離する。 $d\theta_{\pm}/d\theta_s = 1$ なので、この 2 つの像の動径方向のサイズはいずれもソース天体の真のサイズと同じである。したがって、これらの 2 つの像は相似ではない。

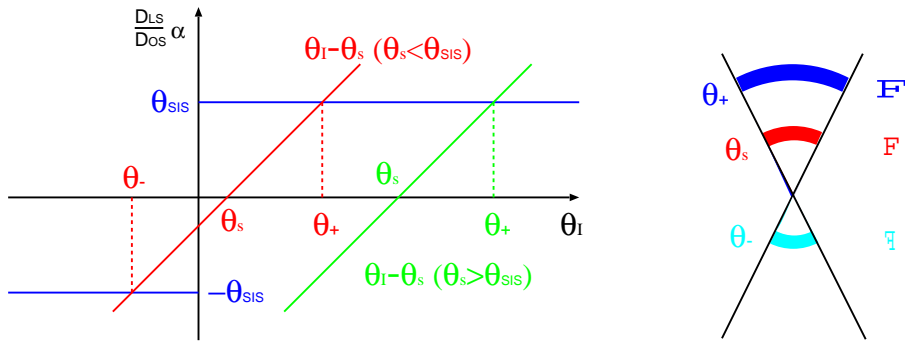


図 4.6: 等温球レンズに対するレンズ方程式の解。

レンズ天体が有限な中心コアをもつ場合には、図 4.7 からわかるようにレンズ方程式の解は 1 個あるいは 3 個となる。この例のように、レンズ天体の中心部で α が不連続とならない場合には、レンズ方程式はかならず奇数個の解を持つ (odd number theorem)。点レンズと singular isothermal sphere は中心に特異点があるために α が不連続となるため、偶数個のレンズ像を持ち得るのである。

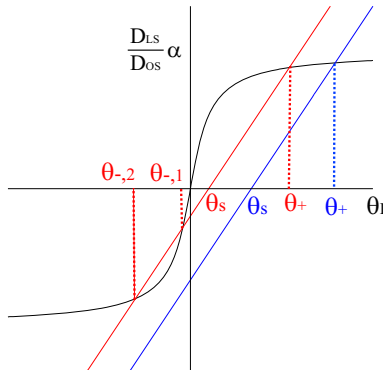


図 4.7: 有限な中心コアをもつ等温球レンズに対するレンズ方程式の解。

4.6 レンズ変換行列: convergence と shear

ソース天体の微小領域がレンズ像上でどのように変形されるかを考えてみる。ソース面上の任意の点 θ_{s0} を原点とする無限小ベクトル $\delta\theta_s$ が、イメージ面上でそれぞれ $\theta_{i,0}$ 、 $\delta\theta_i$ に変換されたとすると、

$$\begin{aligned} \theta_s^i(\theta_i) &\approx \theta_s^i(\theta_{i,0}) + \left. \frac{\partial \theta_s^i}{\partial \theta_i^j} \right|_{\theta_{i,0}} (\theta_i^j - \theta_{i,0}^j) \equiv \theta_{s,0}^i + A_{IS}{}^i{}_j (\theta_i^j - \theta_{i,0}^j) \\ \Rightarrow \delta\theta_s^i &= \left. \frac{\partial \theta_s^i}{\partial \theta_i^j} \right|_{\theta_{i,0}} \delta\theta_i^j. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

A_{IS} はレンズからソースへの変換行列であり、レンズ方程式：

$$\theta_i^i - \theta_s^i = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_{i,i}} \equiv \Psi_{,i} \quad (i = 1, 2) \quad (4.6.2)$$

を思い出すと、レンズポテンシャルを用いて

$$A_{IS}{}^i{}_j = \delta^i{}_j - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_{i,i} \partial \theta_i^j} = \begin{pmatrix} 1 - \Psi_{,xx} & -\Psi_{,xy} \\ -\Psi_{,xy} & 1 - \Psi_{,yy} \end{pmatrix} \quad (4.6.3)$$

と書き表すことができる。

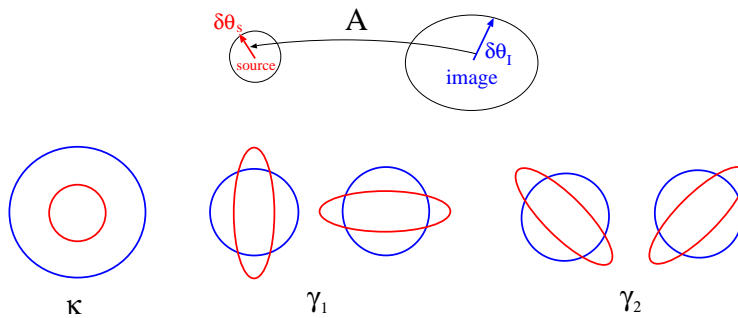


図 4.8: レンズの変換行列と convergence, shear.

通常は

$$\text{convergence : } \kappa \equiv \frac{\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}}{2} = \frac{\Delta \Psi}{2} = \frac{\Sigma(\theta_i)}{\Sigma_c} \quad (4.6.4)$$

$$\text{shear : } \gamma_1 \equiv \frac{\Psi_{,xx} - \Psi_{,yy}}{2}, \quad \gamma_2 \equiv \Psi_{,xy} \quad (4.6.5)$$

を定義して変換行列 A_{IS} を

$$A_{IS} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.6)$$

のように分解する。右辺の3つの行列はそれぞれ、レンズ像の相似拡大³、+モードの変形、 \times モードの変形に対応する(図4.8)。

具体的に円対称レンズの場合の convergence と shear を計算してみよう。まず convergence については、定義にしたがって(4.4.11)式の発散をとれば計算できるが、すでに導いてある(4.4.9)式を用いれば直ちに

$$\kappa = \frac{\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}}{2} = \frac{\Sigma(\theta_I)}{\Sigma_c} = \frac{1}{2\pi\Sigma_c\theta_I} \frac{d\widetilde{M}(<\theta_I)}{d\theta_I} \quad (4.6.7)$$

を得る。shear については(4.4.11)式から

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\Psi_{,xx} - \Psi_{,yy}}{2} = \frac{1}{2\pi\Sigma_c} \left[\frac{\partial}{\partial\theta_{Ix}} \left(\frac{\theta_{Ix}\widetilde{M}(<\theta_I)}{\theta_I^2} \right) - \frac{\partial}{\partial\theta_{Iy}} \left(\frac{\theta_{Iy}\widetilde{M}(<\theta_I)}{\theta_I^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\Sigma_c} \left[\frac{-2\theta_{Ix}^2 + 2\theta_{Iy}^2}{\theta_I^4} \widetilde{M}(<\theta_I) + \frac{1}{\theta_I^2} \underbrace{\left(\theta_{Ix} \frac{\partial}{\partial\theta_{Ix}} - \theta_{Iy} \frac{\partial}{\partial\theta_{Iy}} \right)}_{= \frac{\theta_{Ix}^2 - \theta_{Iy}^2}{\theta_I} \frac{d}{d\theta_I}} \widetilde{M}(<\theta_I) \right]. \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \Psi_{,xy} = \frac{1}{2\pi\Sigma_c} \frac{\partial}{\partial\theta_{Iy}} \left(\frac{\theta_{Ix}\widetilde{M}(<\theta_I)}{\theta_I^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\Sigma_c} \left[\frac{-2\theta_{Ix}\theta_{Iy}}{\theta_I^4} \widetilde{M}(<\theta_I) + \frac{\theta_{Ix}}{\theta_I^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta_{Iy}}}_{= \frac{\theta_{Iy}}{\theta_I} \frac{d}{d\theta_I}} \widetilde{M}(<\theta_I) \right]. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

ここで、 $\theta_I = (\theta_I \cos \varphi, \theta_I \sin \varphi)$ とおけば

$$\gamma_1 = \frac{1}{\pi\Sigma_c} \frac{\theta_{Ix}^2 - \theta_{Iy}^2}{\theta_I^2} \left(\frac{1}{2\theta_I} \frac{d\widetilde{M}(<\theta_I)}{d\theta_I} - \frac{\widetilde{M}(<\theta_I)}{\theta_I^2} \right) = \gamma \cos 2\varphi, \quad (4.6.10)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\pi\Sigma_c} \frac{\theta_{Ix}\theta_{Iy}}{\theta_I^2} \left(\frac{1}{2\theta_I} \frac{d\widetilde{M}(<\theta_I)}{d\theta_I} - \frac{\widetilde{M}(<\theta_I)}{\theta_I^2} \right) = \gamma \sin 2\varphi \quad (4.6.11)$$

4.7 円対称レンズの critical curve と像の変形

(4.6.10) 式と(4.6.11)式より、円対称レンズに対する変換行列 A_{IS} は

$$A_{IS} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \quad (4.7.1)$$

³常に $\kappa > 0$ なので、このモードだけを考えれば $\kappa < 1$ の場合ソース天体を $(1 - \kappa)^{-1}$ 倍に拡大したものがレンズ像となる。

と書ける。この変換行列の固有値と固有ベクトルは

$$\lambda_- = 1 - \kappa - \gamma = 1 + \frac{1}{\pi \Sigma_c} \left(\frac{\widetilde{M}(< \theta_I)}{\theta_I^2} - \frac{1}{\theta_I} \frac{d\widetilde{M}(< \theta_I)}{d\theta_I} \right), \quad \mathbf{w}_- = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.7.2)$$

$$\lambda_+ = 1 - \kappa + \gamma = 1 - \frac{1}{\pi \Sigma_c} \frac{\widetilde{M}(< \theta_I)}{\theta_I^2}, \quad \mathbf{w}_+ = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4.7.3)$$

であるから

$$U \equiv (\mathbf{w}_-, \mathbf{w}_+) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4.7.4)$$

を用いると A_{IS} は対角化されて

$$A'_{\text{IS}} = U^{-1} A_{\text{IS}} U = \begin{pmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \quad (4.7.5)$$

となる。

U は座標系を角度 φ だけ回転させる行列であるから、その座標系に移ると

$$\delta \boldsymbol{\theta}'_I = U^{-1} \delta \boldsymbol{\theta}_I, \quad \delta \boldsymbol{\theta}'_S = U^{-1} \delta \boldsymbol{\theta}_S, \quad (4.7.6)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}'_S = A'_{\text{IS}} \delta \boldsymbol{\theta}'_I = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}'_I, \quad (4.7.7)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}'_I = A'^{-1}_{\text{IS}} \delta \boldsymbol{\theta}'_S \equiv A'_{\text{SI}} \delta \boldsymbol{\theta}'_S = \begin{pmatrix} 1/\lambda_- & 0 \\ 0 & 1/\lambda_+ \end{pmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}'_S. \quad (4.7.8)$$

つまり、ソース天体が単位円だとすれば、レンズ像は、レンズ天体の方向に $1/|\lambda_+|$ 、それと直交する方向に $1/|\lambda_-|$ の楕円となる。 λ_- と λ_+ の符号は像のパリティを示し、負符号ならばその方向に関しては逆像となる。 $\lambda_{\pm} = 0$ となる位置ではレンズ像は発散してしまう。そのような曲線(円対称レンズの場合には円となる)を、レンズ面上では critical curve、ソース面上では caustics と呼ぶ。

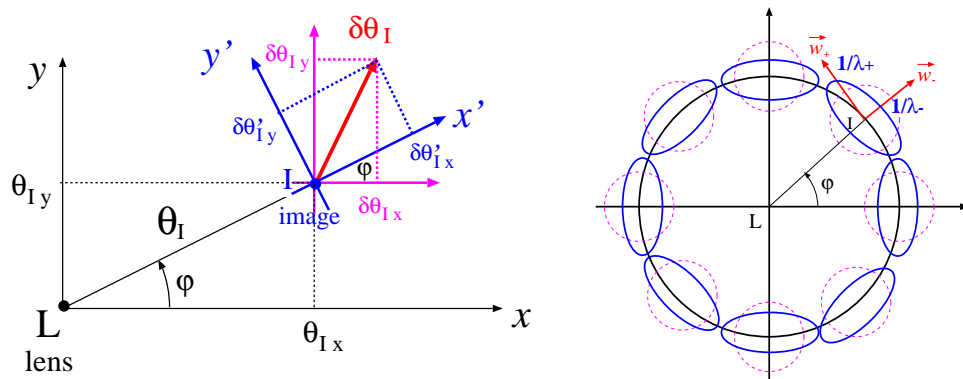


図 4.9: レンズ面の回転とレンズ像の変形。

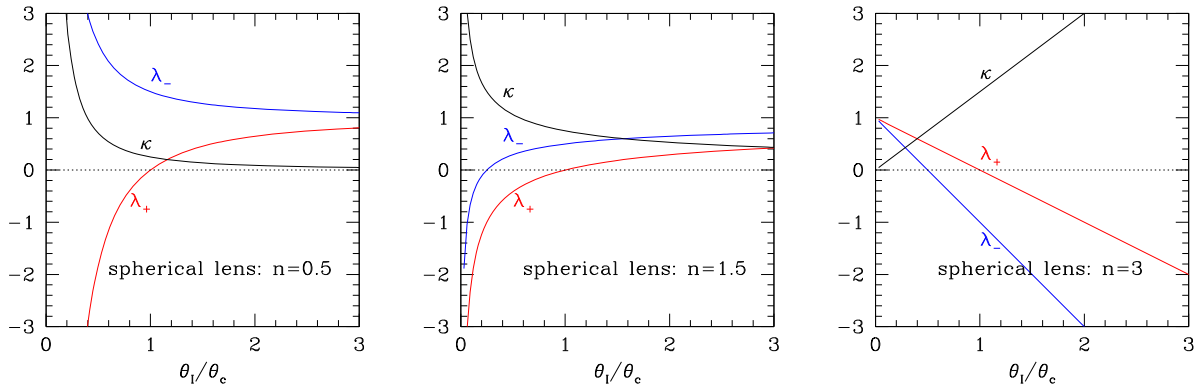


図 4.10: 円対称レンズに対する convergence と shear の振舞い。

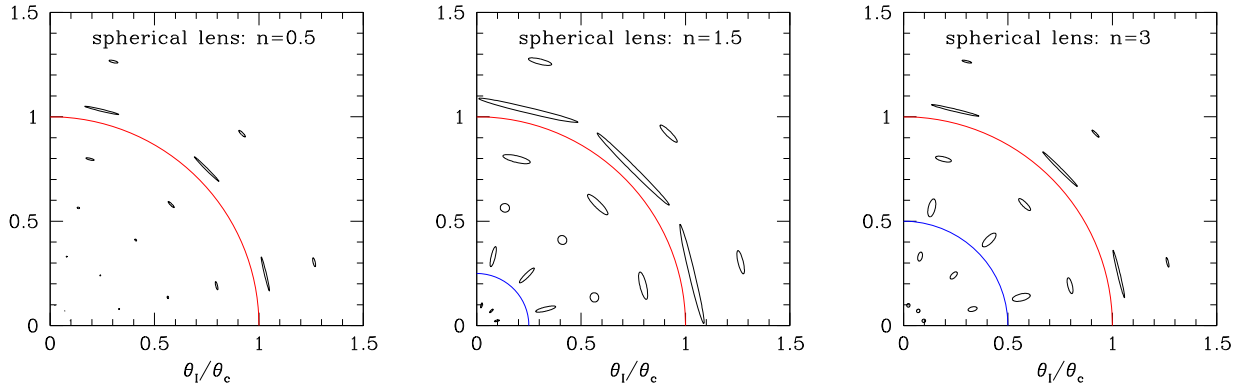


図 4.11: 円対称レンズによるソース天体 (半径 0.007 の円) の変形。

さらに $\widetilde{M}(< \theta_1) = \Sigma_0 \theta_1^n$ ($n > 0$) の場合を考えれば

$$\kappa = \frac{\Sigma_0}{\pi \Sigma_c} \frac{n}{2} \theta_1^{n-2}, \quad \lambda_- = 1 + \frac{\Sigma_0}{\pi \Sigma_c} \theta_1^{n-2} (1 - n), \quad \lambda_+ = 1 - \frac{\Sigma_0}{\pi \Sigma_c} \theta_1^{n-2} \quad (4.7.9)$$

となる。 $\theta_c \equiv (\Sigma_0 / \pi \Sigma_c)^{1/(2-n)}$ と定義した場合の convergence と shear の θ_1 依存性を図 4.10 に示しておく。

4.8 面輝度定理

重力レンズは光線の経路を変化させるだけでなく、天体のみかけの光度をも変える。これを理解するために今までと同じく、図 4.12 のようにソース天体を出た光が重力レンズを受けて観測者に届く場合を考えよう。

ここでソース天体が単位時間あたり放出するエネルギーを \mathcal{L} とする。天文学ではこれを絶対光度 (absolute luminosity)、あるいは単に光度 (luminosity) と呼ぶ。次元は、[erg/s] である⁴。

⁴周波数 ν から $\nu + d\nu$ の範囲の光が単位時間あたり放出するエネルギーを $\mathcal{L}_\nu d\nu$ と定義することもある。この場合 \mathcal{L}_ν の次元は [erg/s/Hz] となる。 \mathcal{L} は \mathcal{L}_ν を全周波数で積分したものであり、その意味で bolometric

また、ソース天体から測った 2 次元角度ベクトル γ と χ を以下によって定義する。

$$\vec{L}\vec{I} \equiv D_{LS}\chi = D_{OL}\theta_I, \quad \vec{L}\vec{S}' \equiv D_{LS}\gamma = D_{OL}\theta_S. \quad (4.8.1)$$

このとき、S と L を観測者面上に延長した点を O' とすると、 O' を基準とした観測者の位置での面積要素は

$$dA = D_{OS}^2 d\gamma_x d\gamma_y \underset{(4.8.1) \text{ 式}}{=} \left(\frac{D_{OS} D_{OL}}{D_{LS}} \right)^2 d\theta_{S,x} d\theta_{S,y} \quad (4.8.2)$$

となる。

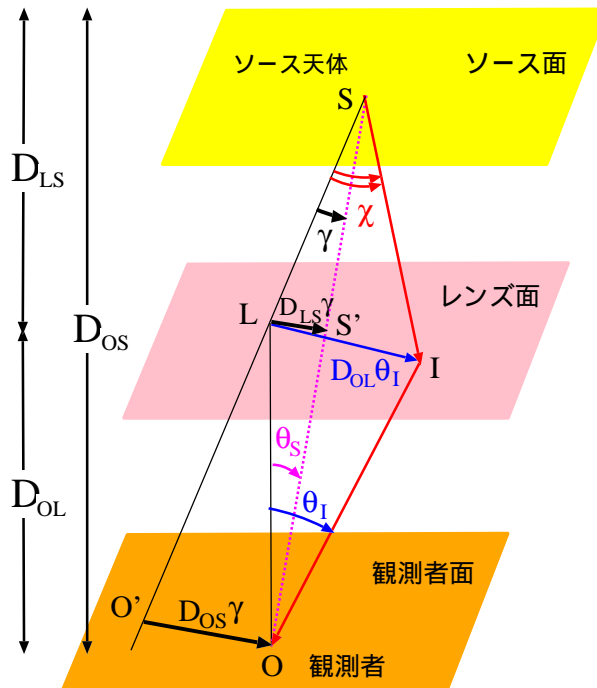


図 4.12: 重力レンズにおけるみかけの光度と面輝度定理。

ソース天体が全立体角に等方的に輻射を放出しているならば、ソース天体が単位立体角あたりに放出する光度 [erg/s/sr] は $\mathcal{L}/4\pi$ となる。ソース天体に対して図 4.12 の I 方向の立体角要素 $d\chi_x d\chi_y$ に放出された輻射を観測者の面積要素 dA で割れば、重力レンズを受けたソース天体の観測者の位置におけるエネルギー流束 (単位面積あたりの光度)⁵ F_{SIO} が

$$F_{SIO} = \frac{\mathcal{L}}{4\pi} \times d\chi_x d\chi_y \times \left(\frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \right)^2 \frac{1}{d\theta_{S,x} d\theta_{S,y}} \underset{(4.8.1) \text{ 式}}{=} \frac{\mathcal{L}}{4\pi D_{OS}^2} \frac{d\theta_{I,x} d\theta_{I,y}}{d\theta_{S,x} d\theta_{S,y}} \quad (4.8.3)$$

luminosity と呼ばれることもある。実際の観測では \mathcal{L}_ν をある有限の周波数範囲で積分したものを考えるのが普通であり、それに対応する周波数帯の光度 (band luminosity) と呼んで区別することもある。例えば、線光度、X 線光度、赤外線光度、可視光度、電波光度などであるが、天文学ではこれらを明示せずあいまいなまま議論することも多いので注意が必要である。本節の議論は \mathcal{L} を \mathcal{L}_ν に置き換えてもそのまま成立する。

⁵これを、みかけの光度 (apparent luminosity) と呼ぶこともある。紛らわしいが次元は [erg/s/cm²] であり、(絶対) 光度と異なっているので気を付けてほしい。

と計算できる。ここで、

$$F_{SS'O} \equiv \frac{\mathcal{L}}{4\pi D_{OS}^2} \quad (4.8.4)$$

は、ソース天体が重力レンズを受けることなく直進した場合の観測者の位置におけるエネルギー流束である。(4.8.3) 式は、重力レンズを受けた像 I' のエネルギー流束 F_{SIO} が受けない場合に比べて

$$\frac{F_{SIO}}{F_{SS'O}} = \frac{d\theta_{I,x}d\theta_{I,y}}{d\theta_{S,x}d\theta_{S,y}} = \frac{\theta_I d\theta_I}{\theta_S d\theta_S} \quad (4.8.5)$$

倍だけ変化することを示している(2つめの等号は2次元角度ベクトルを2次元の極座標で書き直したものである)。この比は θ_S から θ_I への変換のヤコビアンである。

この式の $d\theta_{S,x}d\theta_{S,y}$ と $d\theta_{I,x}d\theta_{I,y}$ は、それぞれ観測者がソース天体とそのレンズ像の同じ領域を見込む立体角である。したがって、天体からの輻射を観測者の単位面積およびそれを見こむ単位立体角あたりの値にしたものを表面輝度 S とすれば⁶

$$S_{SIO} \equiv \frac{F_{SIO}}{d\theta_{I,x}d\theta_{I,y}} = \frac{F_{SS'O}}{d\theta_{S,x}d\theta_{S,y}} \equiv S_{SS'O} \quad (4.8.6)$$

が成り立つ。つまり重力レンズには関係なく、天体の表面輝度は一定である。これは光線に沿って光が吸収や散乱を受けない場合に成り立つ一般的な結果で、面輝度定理 (brightness theorem) と呼ばれている。重力レンズは光子の個数やエネルギーを変化させる過程ではないため、この、面輝度定理を満たしているのである。したがって、重力レンズによって天体のエネルギー流束(みかけの光度)が変化するのは、その天体を見込む立体角の変化に起因したものである。

4.9 重力レンズの増光率

具体的に円対称レンズに対するレンズ像の増光率を計算してみよう。

(i) 点レンズ：点レンズの場合には、レンズ方程式の解は(4.5.8) 式より

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\theta_S \pm \sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2} \right) \quad (4.9.1)$$

なので、この2つの像に対応する増光率は

$$\begin{aligned} A_{\pm} &\equiv \left| \frac{\theta_{\pm} d\theta_{\pm}}{\theta_S d\theta_S} \right| = \left| \frac{1}{2\theta_S} \left(\theta_S \pm \sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2} \right) \times \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\theta_S}{\sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2}} \right) \right| \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + 4/x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4/x^2}} \pm 2 \right) \quad (x \equiv \theta_S/\theta_E). \quad (4.9.2) \end{aligned}$$

⁶次元は [erg/s/cm²/sr].

最後の式の括弧の中に相加相乗平均の関係を用いると、レンズ天体の中心に対してソース天体と同じ側にあるレンズ像 ($\theta_1 = \theta_+$) は必ずより明るくなる ($A_+ > 1$) ことがわかる。

この2つの像がなす角 $\theta_+ - \theta_- = \sqrt{\theta_s^2 + 4\theta_E^2}$ が小さい場合には、これらは分離できず一つの像として観測されることになる。この場合の全増光率は

$$A_{\text{tot}} = A_+ + A_- = \frac{1}{2} \frac{2 + 4/x^2}{\sqrt{1 + 4/x^2}} = \frac{x^2 + 2}{x\sqrt{x^2 + 4}} \quad (4.9.3)$$

それらの比は

$$\frac{A_+}{A_-} = \frac{2 + 4/x^2 + 2\sqrt{1 + 4/x^2}}{2 + 4/x^2 - 2\sqrt{1 + 4/x^2}} = \left(\frac{\sqrt{4 + x^2} + x}{\sqrt{4 + x^2} - x} \right)^2. \quad (4.9.4)$$

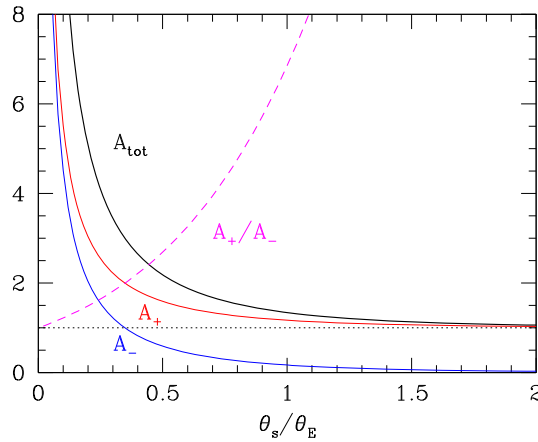


図 4.13: 点レンズによる増光率。

これらの結果を図 4.13 にまとめておく。 $\theta_s = \theta_E$ が一つの目安となる値を与え、

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \approx 1.17, & A_- &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \approx 0.17, \\ A_{\text{tot}} &= \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34, & \frac{A_+}{A_-} &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \approx 6.85 \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

となる。

- (ii) **singular isothermal sphere** : この場合、レンズ方程式の解は (4.5.17) 式で与えられる。 $\theta_s > \theta_{\text{SIS}}$ ならば像は1つで

$$\theta_+ = \theta_s + \theta_{\text{SIS}} \Rightarrow A_+ \equiv \left| \frac{\theta_+ d\theta_+}{\theta_s d\theta_s} \right| = \frac{\theta_{\text{SIS}}}{\theta_s} + 1 \quad (\theta_s > \theta_{\text{SIS}}). \quad (4.9.6)$$

一方、 $\theta_s < \theta_{\text{SIS}}$ なら像は2つとなり

$$\theta_{\pm} = \theta_s \pm \theta_{\text{SIS}} \Rightarrow A_{\pm} \equiv \left| \frac{\theta_{\pm} d\theta_{\pm}}{\theta_s d\theta_s} \right| = \frac{\theta_{\text{SIS}}}{\theta_s} \pm 1 \quad (\theta_s < \theta_{\text{SIS}}). \quad (4.9.7)$$

後者の場合、全増光率とそれらの比は

$$A_{\text{tot}} = A_+ + A_- = 2 \frac{\theta_{\text{SIS}}}{\theta_s}, \quad \frac{A_+}{A_-} = \frac{\theta_{\text{SIS}} + \theta_s}{\theta_{\text{SIS}} - \theta_s} \quad (4.9.8)$$

となる。

4.10 重力マイクロレンズとMACHO

今まではソース天体、レンズ天体、および観測者の運動を無視した静的状況を考えてきた。その場合、もちろん重力レンズは時間変化しない。しかし、実際にはこれらの運動、さらにはソース天体の光度が時間変動することを考えると、重力レンズは時間変化するはずだ。しかし遠方天体に対してはこの運動の効果はほとんど無視できる。例えば、我々から 100Mpc 離れた天体が速度 300 km/s で運動しているとすると、一年間に動く角度は

$$\Delta\theta \approx \frac{300 \text{ km s}^{-1} \times 3 \times 10^7 \text{ s}}{100 \text{ Mpc}} \approx 1 \mu\text{arcsec} \quad (4.10.1)$$

程度でしかない。

しかしながら、銀河系内にあるかもしれない暗い天体⁷ が、より遠方の星に対して及ぼす重力レンズ効果による光度の時間変化は観測できるかもしれない。1986 年、プリンストン大学のボーダン・パチンスキーは重力レンズ効果を用いて、我々の銀河系を満たしているかもしれない $(10^{-6} \sim 100)M_\odot$ の MACHO を検出する以下のような巧妙な方法を提案した。銀河系の伴銀河である大マゼラン星雲を観測すると、ごくたまにある MACHO 天体が、その星と地球とを結ぶ線上のごく近傍を横切ることがあるはずである（銀河系内の天体は静止してはおらず、平均的には 200 km/sec 程度の速度でランダムに運動している）。その場合、個々の MACHO は光を集めるレンズとして働き、一ヶ月の期間その星がより明るく輝いて見えるはずだ。これは重力マイクロレンズ効果と呼ばれ、一個の星がこの効果を受ける確率はとてつもなく小さいのであるが、大マゼラン星雲にある約 1000 万個の星の光度を定期的にモニターすることで確率の低さを補うことができる。このパチンスキーによる提案を具体的に検討してみよう。

4.10.1 マイクロレンズの光度曲線

簡単のために、ソース天体と観測者は静止、レンズ天体のみが速度 v_L で運動しているものとする。この場合、レンズ天体の中心を原点と選ぶことにすれば、ソース天体がレンズ天体の角速度 $u_L \equiv v_L/D_{\text{OL}}$ で相対的に運動しているように観測される。レンズ天体を点レンズで近似し、あるソース天体が時刻 t_0 でレンズ天体にもっとも接近し、そのときの角度を θ_{s0} とすると、時刻 t におけるソース天体とレンズ天体のなす角度は

$$\theta_s(t) = \sqrt{\theta_{s0}^2 + u_L^2(t - t_0)^2} \quad (4.10.2)$$

⁷ダークマターの候補の一つであり、MAssive Compact Halo Object (重くコンパクトなハロー天体) という英語の頭文字から MACHO(マチョ) というあだ名で呼ばれている。もともとはスペイン語で、男性的なという意味の形容詞、あるいはたくましい男という意味の名詞である。

で与えられる。

(4.9.3) 式より、これに対応する増光率 $A(t)$ は

$$A(t) = \frac{x^2(t) + 2}{x\sqrt{x^2(t) + 4}}, \quad x(t) = \frac{\theta_s(t)}{\theta_E} = \sqrt{\left(\frac{\theta_{s0}}{\theta_E}\right)^2 + \left(\frac{\pi\Sigma_c v_L}{M}\right)^2 (t - t_0)^2}. \quad (4.10.3)$$

銀河系内の MACHO によって大マゼラン星雲 (LMC: Large Magellanic Cloud) 内の星がマイクロレンズを受ける場合、典型的なパラメータを考えてみると、

$$\left\{ \begin{array}{l} v_L \approx \frac{v_{\text{rot}}}{\sqrt{2}} \approx 200 \text{ km s}^{-1} \\ D_{\text{OL}} \approx R \approx 10 \text{ kpc} \\ \Sigma_c = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{\text{OS}}}{D_{\text{OL}}(D_{\text{OS}} - D_{\text{OL}})} \approx \frac{c^2}{4\pi G} \frac{1}{R} \approx 3 \times 10^4 \left(\frac{10 \text{ kpc}}{R}\right) \text{ g cm}^{-3} \\ \theta_E = \frac{1}{D_{\text{OL}}} \sqrt{\frac{M}{\pi\Sigma_c}} \approx \frac{1}{R} \sqrt{4GMR} = 0.3 \sqrt{\frac{M}{0.1M_\odot}} \sqrt{\frac{10 \text{ kpc}}{R}} \text{ marcsec} \\ \Delta t_{\text{EL}} \equiv \frac{\theta_E}{u_L} \approx \frac{\sqrt{4GMR}}{v_L} \approx 20 \sqrt{\frac{M}{0.1M_\odot}} \sqrt{\frac{R}{10 \text{ kpc}}} \left(\frac{200 \text{ km s}^{-1}}{v_L}\right) \text{ 日}. \end{array} \right. \quad (4.10.4)$$

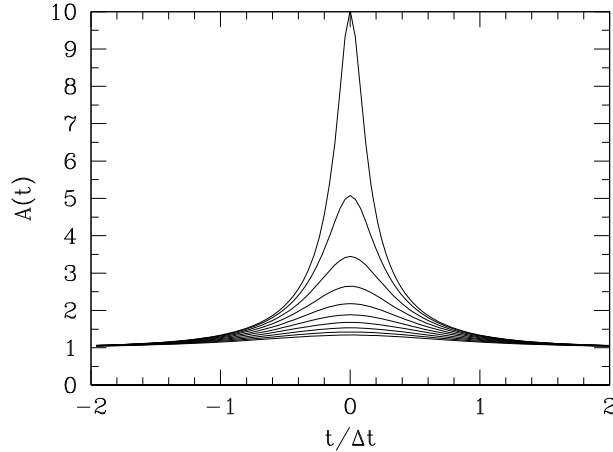


図 4.14: マイクロレンズの増光率。上から $\theta_{s0}/\theta_E = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ の場合。 Δt_{EL} はアイシュタイン半径をレンズ天体が横切る時間スケール。

4.10.2 円対称重力レンズに対する断面積

ソース天体が A 倍に増光されるようなレンズ天体との離角を $\theta_s(A)$ とする。ソース天体がレンズ天体の中心から $\theta < \theta_s(A)$ 以内に位置していれば、ソース天体は A 倍以上の増光を受けるので、レンズ面で考えたときの重力レンズの断面積は単純に

$$\sigma(> A) \equiv \pi [D_{\text{OL}} \theta_s(A)]^2 \quad (4.10.5)$$

で与えられる。したがって、 θ_s の関数として与えられた増光率 $A = A(\theta_s)$ を逆に解き直して $\theta_s = \theta_s(A)$ を求めれば断面積が計算できる。

(i) 点レンズ: (4.9.3) 式を逆に解くと

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{x^2 + 2}{x\sqrt{x^2 + 4}} \Rightarrow A^2 x^2 (x^2 + 4) = x^4 + 4x^2 + 4 \\
 &\Rightarrow (A^2 - 1)x^4 + 4(A^2 - 1)x^2 - 4 = 0 \\
 &\Rightarrow x^2 = \frac{-2(A^2 - 1) + \sqrt{4(A^2 - 1)^2 + 4(A^2 - 1)}}{A^2 - 1} \\
 &= \frac{2}{A^2 - 1} \left[-(A^2 - 1) + A\sqrt{A^2 - 1} \right] = \frac{2}{A\sqrt{A^2 - 1} + A^2 - 1}. \quad (4.10.6)
 \end{aligned}$$

したがって、(4.10.5) 式は

$$\begin{aligned}
 \sigma(> A) &= \pi [D_{\text{OL}} \theta_{\text{E}} x]^2 = \pi D_{\text{OL}}^2 \times \left(\frac{1}{D_{\text{OL}}} \sqrt{\frac{M}{\pi \Sigma_{\text{c}}}} \right)^2 \frac{2}{A\sqrt{A^2 - 1} + A^2 - 1} \\
 &= \frac{M}{\Sigma_{\text{c}}} \frac{2}{A\sqrt{A^2 - 1} + A^2 - 1} = \frac{4\pi G M D_{\text{OL}} D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \frac{2}{A\sqrt{A^2 - 1} + A^2 - 1} \quad (4.10.7)
 \end{aligned}$$

となる。

(ii) singular isothermal sphere: この場合、密度分布

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2} \quad (4.10.8)$$

なので、以前と同じく

$$\theta_{\text{SIS}} = \frac{4\pi \sigma_v^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \quad (4.10.9)$$

を定義すれば

$$\begin{cases} \theta_{\text{s}} > \theta_{\text{SIS}} & A = \frac{\theta_{\text{SIS}}}{\theta_{\text{s}}} + 1 & \Rightarrow \theta_{\text{s}} = \frac{\theta_{\text{SIS}}}{A - 1} \\ \theta_{\text{s}} < \theta_{\text{SIS}} & A = 2 \frac{\theta_{\text{SIS}}}{\theta_{\text{s}}} & \Rightarrow \theta_{\text{s}} = \frac{2\theta_{\text{SIS}}}{A} \end{cases} \quad (4.10.10)$$

したがって、

$$\sigma(> A) = \pi \left(\frac{4\pi \sigma_v^2 D_{\text{OL}} D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \right)^2 \times \begin{cases} 4/A^2 & (A > 2) \\ 1/(A - 1)^2 & (1 < A < 2) \end{cases} \quad (4.10.11)$$

4.10.3 マイクロレンズの確率

次にある一つのソース天体に対して増光率 A 以上の重力レンズが起こる確率 $\tau(> A; D_{\text{OS}})$ を計算してみよう。そのソース天体の視線方向に観測者から距離 r の位置に存在するレン

ズ天体の個数密度を $n(r)$ 、そのレンズ天体が増光率 A 以上の重力レンズを起こす断面積を $\sigma(> A; r)$ とすれば

$$\tau(> A; D_{\text{Os}}) = \int_0^{D_{\text{Os}}} n(r) \sigma(> A; r) dr. \quad (4.10.12)$$

ここで具体的に、銀河中心にいる観測者が $D_{\text{Os}} \approx 50\text{kpc}$ にある大マゼラン星雲中の星を観測する場合を考えてみる。銀河中のダークマターの質量密度分布を

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2 + r_c^2} & (r < R_h) \\ 0 & (r > R_h) \end{cases} \quad (4.10.13)$$

と近似する (R_h は銀河をとりまくハローのサイズ)。これらを点粒子の集まりとみなし、 r とは無関係に質量 $M \sim M + dM$ の粒子が全体の $f(M)dM$ だけの割合を占めるものとする。つまり、質量 M のレンズ天体の個数密度が

$$n(r; M) = \frac{\rho(r; M)}{M} = \frac{f(M)}{M} \rho(r), \quad \int_0^\infty f(M) dM = 1 \quad (4.10.14)$$

で与えられるものとする。距離 r にある質量 M の質点に対する重力レンズの断面積は (4.10.7) 式より

$$\sigma(> A; r, M) = \frac{4\pi GM r (D_{\text{Os}} - r)}{c^2} \frac{2}{D_{\text{Os}} \sqrt{A^2 - 1} + A^2 - 1} \quad (4.10.15)$$

である。したがって (4.10.12) 式は

$$\begin{aligned} \tau(> A; D_{\text{Os}}) &= \int_0^{D_{\text{Os}}} dr \int_0^\infty n(r; M) \sigma(> A; r, M) dM \\ &= \int_0^{R_h} dr \int_0^\infty dM \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2 + r_c^2} \frac{f(M)}{M} \frac{4\pi GM r (D_{\text{Os}} - r)}{c^2} \frac{2}{D_{\text{Os}} \sqrt{A^2 - 1} + A^2 - 1} \\ &= 2 \frac{\sigma_v^2}{c^2} \frac{2}{A\sqrt{A^2 - 1} + A^2 - 1} \left[\int_0^{R_h} \frac{r}{r^2 + r_c^2} dr - \frac{1}{D_{\text{Os}}} \int_0^{R_h} \frac{r^2}{r^2 + r_c^2} dr \right]. \end{aligned} \quad (4.10.16)$$

この右辺の積分は

$$\int_0^{R_h} \frac{r}{r^2 + r_c^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^{R_h^2} \frac{dx}{x + r_c^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{R_h^2 + r_c^2}{r_c^2} = \ln \sqrt{1 + \frac{R_h^2}{r_c^2}} \quad (4.10.17)$$

$$\int_0^{R_h} \frac{r^2}{r^2 + r_c^2} dr = \int_0^{R_h} \left(1 - \frac{r_c^2}{r^2 + r_c^2} \right) dr = R_h - r_c \tan^{-1} \left(\frac{R_h}{r_c} \right) \quad (4.10.18)$$

であるから、(4.10.16) 式は

$$\tau(> A; D_{\text{Os}}) = 2 \frac{\sigma_v^2}{c^2} \frac{2}{A\sqrt{A^2 - 1} + A^2 - 1} \left[\ln \sqrt{1 + \frac{R_h^2}{r_c^2}} + \frac{r_c}{D_{\text{Os}}} \tan^{-1} \left(\frac{R_h}{r_c} \right) - \frac{R_h}{D_{\text{Os}}} \right]. \quad (4.10.19)$$

この結果は $f(M)$ には依存しないことに注意してほしい。典型的な例を図 4.15 に示しておく。 $A = 3/\sqrt{5} \approx 1.34$ を重力レンズの目安とすれば、ソース天体一つあたりの確率は 10^{-6} 程度でしかない。逆にいえば、100 万個程度の星を観測すれば常にその中の一個は重力レンズを受けているとも言える。

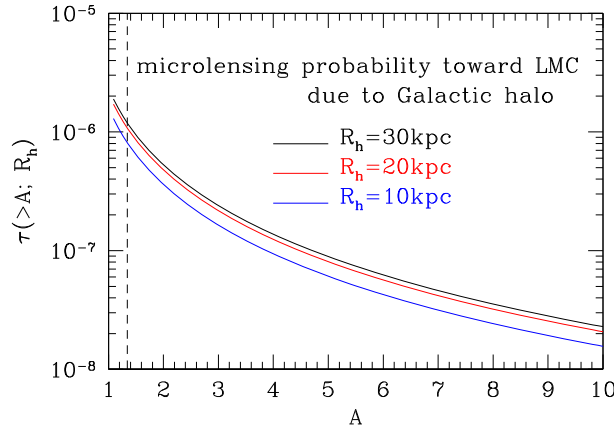


図 4.15: 銀河系ハローによる LMC の星に対する増光率 A 以上の重力レンズの確率。 $r_c = 2\text{kpc}$ 、 $D_{\text{os}} = 50\text{kpc}$ 、 銀河ハローの半径を R_h とした場合。

上述の $\tau(> A)$ はあるソース天体がある瞬間に重力レンズを起こしている確率である。銀河系内でのレンズ天体の運動が無視できるならば、あるソース天体が重力レンズを起こしていなければそれはいつまで経っても重力レンズを起こすわけがない。しかし実際にはレンズ天体は速度 v_L でランダムに運動しているため、ある時間連続的に観測すれば、ソース天体が重力レンズを起こすようになる可能性がある。そこで次に、あるソース天体を連続的にモニター観測した場合に、単位時間あたり増光率 A 以上の重力レンズを起こすイベントレート $\Gamma(> A)$ を計算してみる。

これは ΔT の観測期間に、あるレンズ天体と角距離 $\theta_s(A)$ 以内に存在するソース天体の個数を数えれば良い。レンズ天体の角速度を u_L とすれば、ソース天体が重力レンズを起こしうる天球上の領域の面積は $2\theta_s(A)u_L\Delta T$ 。ところで、 $\tau(> A)$ はソース天体一個あたりの重力レンズの確率であるが、これはあるレンズ天体のまわり $\pi\theta_s^2(A)$ 内に存在しているソース天体の個数の期待値とも解釈できる。この解釈にしたがえば、 A 以上の重力レンズを起こしうるソース天体の単位角面積当たりの個数密度は $\tau(> A)/(\pi\theta_s^2(A))$ であるので

$$\begin{aligned} \Gamma(> A) &= \frac{1}{\Delta T} \times 2\theta_s(A)u_L\Delta T \times \frac{\tau(> A)}{\pi\theta_s^2(A)} = \frac{2}{\pi} \frac{\tau(> A)}{\theta_s(A)/u_L} \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{A\sqrt{A^2-1} + A^2-1}} \frac{\tau(> A)}{\Delta t_{\text{EL}}} \end{aligned} \quad (4.10.20)$$

4.10.4 マイクロレンズの発見

実際 この MACHO による星の増光と思われる現象が 1993 年報告された。図 4.16 は米国のグループによる観測データである。この結果は、我々の銀河系を満たしている暗黒物質 (の一部) が天文学的候補よりなっていることを示した画期的なものである。

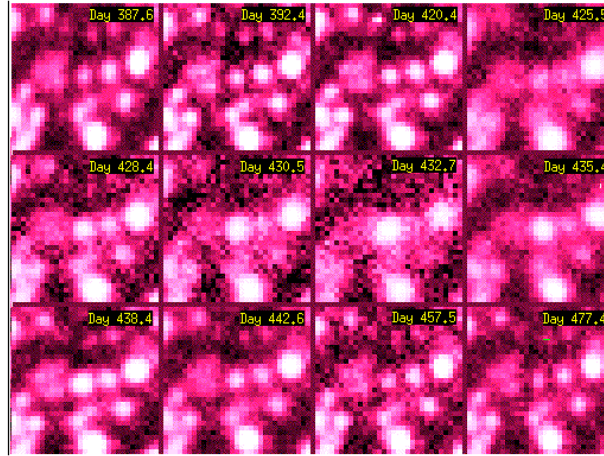


図 4.16: この画像の中心にある星は、観測開始後 420 日頃から明るくなり、432 日頃最大光度となり、以後徐々に元の明るさに戻った。左右の図はその前後 45 日の観測結果。この例は $0.1M_{\odot}$ 程度の MACHO によって引き起こされたものと推定される。

米国グループは、1992 年 7 月から 1999 年 12 月の 5 年 7 ヶ月の観測データから、銀河系の質量の約 20 パーセントが、典型的には $0.2M_{\odot}$ 程度の質量を持つ MACHO で占められているとする結果を出している。一方、フランスのグループは 1996 年 7 月から 2003 年 2 月の 6 年 7 ヶ月にわたる観測データの解析の結果、従来重力マイクロレンズ候補であると考えられていたもののいくつかを否定し、MACHO 存在量の上限值を得た。図 4.17 は、銀河系の全質量の何割が MACHO 天体で占められていると考えられるかという制限を MACHO の質量の関数として示したものである。

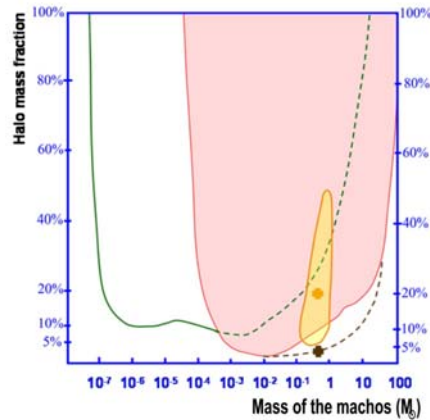


図 4.17: 銀河系 MACHO の存在量に対する観測的制限。

このように MACHO 天体の存在量に関してはまだ議論があるものの、候補となっている MACHO の質量を考えれば、通常物質でできた天体であると解釈するのが自然である。この意味でも、図 4.17 の結果は、銀河系にはバリオン暗黒物質が存在するとしてもそれらはむしろ例外で、銀河系に付随する暗黒物質の大半はやはり非バリオンであることを示唆している。