

### 2.9.4 宇宙の加速膨張の発見

宇宙は現在膨張している。この事実は 1929 年、エドウィン・ハッブルによって観測的に発見された。その結果、宇宙には始まりも終わりもなく常に同じ状態のまま永遠に存在し続けるとする「静的」宇宙観は破棄され、進化する「動的」宇宙観が市民権を得た。その約 70 年後の 1998 年、遠方の超新星を用いた観測によってこの膨張は加速していることが示された。この結果は、米国の科学雑誌 *Science* によって 1998 年のブレイクスルーに選ばれている。

これらをあえて正確とは言えない表現で説明すれば以下のようなになる。時刻  $t$  における宇宙の「半径」を  $a(t)$  としよう。現在の時刻  $t = t_0$  において、時間に関してテイラー展開すれば、

$$a(t) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_0 (t - t_0)^2 + \dots \quad (2.9.30)$$

となる。この右辺の項は順に、現在の宇宙のサイズ、速度、加速度に対応する。しかし実はそれらの値はわからない。というか、宇宙は無限にひろがっていると考えられており、 $a(t)$  およびそれらの微係数の値自身は定義できない(あるいは意味がない)と言うべきなのである<sup>9</sup>。一方、それらを組み合わせて得られる

$$H_0 \equiv \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{da}{dt} \right|_0, \quad (2.9.31)$$

$$q_0 \equiv -\frac{1}{a(t_0)H_0^2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_0 \quad (2.9.32)$$

は観測可能量であり、それぞれハッブル定数、減速パラメータと呼ばれる重要な宇宙論パラメータとして知られている。

$a(t)$  の時間変化を支配するのはもちろん重力である。その一階微分に対応する  $H_0$  が正の値をとることがすなわち宇宙が膨張していることに対応する。「なぜ現在の宇宙が収縮ではなく膨張しているか」という疑問に答えることは極めて難しいが、これは初期条件に帰着すべき問題で、重力が働いていようと膨張していること自体は不思議ではない。一方、二階微分に対応する  $q_0$  については事情が異なる。宇宙膨張の加速度は、通常の重力を考える限り初期条件には無関係に負の値をとるはずだ。だからこそ、 $q_0$  は加速度にマイナスをつけて定義され、わざわざ「減速」パラメータと呼ばれているわけである。このことから、 $q_0$  が負の値をとるとは全く予想されていなかったことがわかる。にもかかわらず最近の観測は、

$$q_0 \approx -0.6 \quad (2.9.33)$$

という負の値を示唆している。負の加速度として定義された減速パラメータが負の値をとっているから宇宙は実は加速している、というなんだかややこしい事態になってしまっている。

<sup>9</sup>これが正確ではないと断ってから始めた理由であるが、一般相対論を用いればこの  $a(t)$  は宇宙のスケール因子に対応し、定数倍の自由度を除いて明確に定義される量となる。

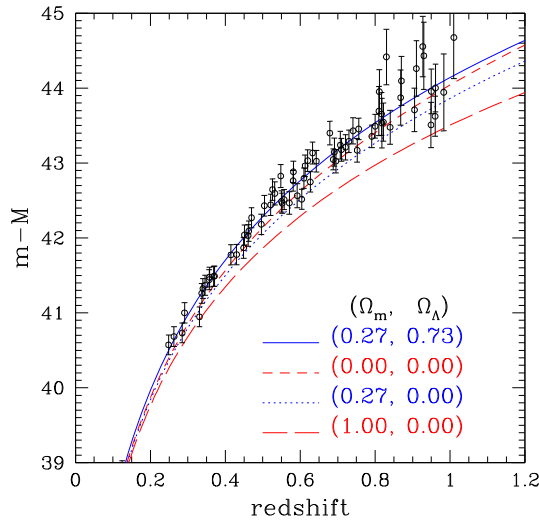


図 2.2: 超新星レガシーサーベイに基づく赤方偏移-距離指標関係。

るわけである。そのせいもあり、現在では減速パラメータという量は文献ではほとんど使われていない。

そもそも宇宙膨張は、遠方銀河までの距離  $d$  とその銀河と我々との相対速度  $v$  が比例関係:

$$v = H_0 d \quad (2.9.34)$$

にあるという観測事実 (ハッブルの法則) から導かれた。ここでいう「相対速度」とは、銀河の吸収線の波長のずれをドップラー効果:

$$\lambda_{\text{観測者}} = \lambda_{\text{実験室系}} (1 + v/c) \quad (2.9.35)$$

によって解釈して読み替えたものに他ならない。その意味では、より本質的な観測量は赤方偏移と呼ばれる無次元パラメータ:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{観測者}} - \lambda_{\text{実験室系}}}{\lambda_{\text{実験室系}}} \quad (2.9.36)$$

である。「赤方」というすでに偏見の入りこんだ名前になっているのは、遠方天体の波長が常に伸びる (赤くなる) 方向に偏移しているからであり、まさに宇宙が全体として膨張している事実に対応している<sup>10</sup>。

加速膨張という事実を明確にしたのは1998年のIa型超新星の観測結果で、冒頭で紹介したブレイクスルーである。これは(2.9.34)式で表される近傍宇宙におけるハッブルの法則をより遠方まで拡張したものと考えて良い。超新星は星の進化の最終段階での爆発現象であり、そのスペクトルの性質から、Ia、Ib、Ic、II型に分類される。特にIa型超新星は連星系中の白色矮星が起こすものと考えられており、明るさが最大となるときの絶対光度がほぼ一定で約一ヶ月もの長期間にわたりその母銀河と匹敵する程の明るさを示す。したがって、極めて遠方にある母銀河の距離を決定するための標準光源として有用である。図

<sup>10</sup>我々の宇宙が収縮していたならば、(2.9.36)式はマイナスをつけて定義された上で、青方偏移と呼ばれていたことであろう。

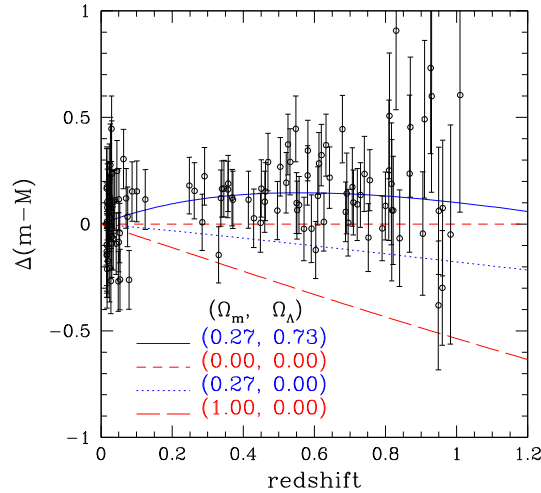


図 2.3: 超新星レガシーサーベイに基づく赤方偏移-距離指標関係。図 2.2 を等速膨張の場合に  $\Delta(m - M) = 0$  となるように縦軸を変換したものの。

2.2 は、超新星レガシーサーベイと呼ばれる 5 年プロジェクトの初年度のデータをまとめたものである。この間に観測された 71 個の Ia 型超新星の距離指標 (みかけの等級  $m$  と絶対等級  $M$  の差で、その天体までの距離に対応。遠いほど値が大きくなる) とその母銀河の赤方偏移 (値が大きいほど遠方、すなわち過去に対応する) がある関係にしたがっていることが見てとれる。そこに描かれている 4 本の理論予想のうち、一番下のカーブが上述のインシュタイン・ド・ジッターモデル (減速膨張) で、これとは完全にかけ離れている。一方、上から 2 番目のカーブは宇宙に物質が存在しない (したがって加速も減速もしない) 場合で、実はデータはその結果にかなり近い。しかし、さらに精密な比較のために 2 番目のカーブとの残差をプロットしてみると、それに比べてデータは若干上側にあることがわかる (図 2.3)。つまり、遠方の超新星は 2 番目の曲線に対応する空っぽの宇宙モデルの予想よりも少しだけ暗い。これは、等速膨張をする場合よりも宇宙のサイズが大きいことを示唆しており、加速膨張を経験していることが結論されるわけだ。

### 加速膨張の解釈 I: 宇宙定数

この加速膨張を生み出す原因はどう解釈すればよいのだろうか? もっとも単純なのは、膨張を減速させる重力=万有引力に対抗して、加速させる「万有斥力」をもちこむことである。ここで (2.9.20) 式で示したように、一般相対論はこの万有斥力に対応する項の自由度を内在していることを思い出してほしい。インシュタインはこの  $\Lambda$  の自由度を用いて、膨張も収縮もしない静的宇宙モデルを構築しようとした (1917 年)。この考え自体は全くの失敗であったと言えるのだが、何と 80 年後に宇宙の加速膨張の担い手として表舞台にカムバックしたわけだ。宇宙が圧力の無視できる (非相対論的) 物質で満たされている場合には、(2.9.20) 式を

$$\frac{1}{aH_0^2} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{\Omega_m}{2} (1+z)^3 + \Omega_\Lambda \quad (2.9.37)$$

と書き直すことができる。ここで、

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G\rho(t_0)}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (2.9.38)$$

は、現在の宇宙における (非相対論的) 物質密度と宇宙定数をそれぞれ無次元化したパラメータである。

(2.9.37) 式の意味は直感的には明らかである。普通の物質に対応する  $\Omega_m$  の寄与は重力として宇宙膨張を減速させる。過去 ( $z$  が大きくなる方向) の宇宙はより高密度であるから、現在に比べて  $\Omega_m$  が  $(1+z)^3$  倍された効果となる。一方、宇宙定数は名前の通りその大きさは時間とともに変化せず、常に  $\Omega_\Lambda$  だけの万有斥力を及ぼし宇宙膨張を加速させる。このように加速膨張を宇宙定数によって説明しようとする解釈が現在もっとも標準的である。この解釈にしたがって、超新星のデータや宇宙マイクロ波背景輻射データなどを組み合わせて推定された値は

$$\Omega_m = 0.27 \pm 0.04, \quad \Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04 \quad (2.9.39)$$

となっている。図 2.2 及び図 2.3 に描き入れられている実線は、上記の値を採用した場合で、確かに一致は良い。

この解釈に従えば、(2.9.37) 式から加速膨張は

$$z < \left( \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{1/3} - 1 \quad (2.9.40)$$

の時期に限られ、過去では ( $\Omega_m = 0.27$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.73$  の場合は  $z > 0.75$ ) 減速膨張であるはずだ。残念ながら今のところこのような赤方偏移の観測データは限られておりかつ精度もあまり良くない (図 2.2、2.3)。この領域の信頼性の高いデータの蓄積は宇宙定数による解釈のさらなる検証のために本質的である。

## 加速膨張の解釈 II：未知の重力法則

加速膨張に対するもう一つの解釈は、宇宙論的な大スケールで一般相対論が厳密には成り立たないとするものである。(2.9.20) 式が端的に示しているように、一般相対論に基づく宇宙膨張は本質的にはニュートンの逆二乗則にしたがっている。図 2.4 は、ニュートンの逆二乗則からのずれを湯川項で代表した重力ポテンシャル：

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda}) \quad (2.9.41)$$

を仮定した場合、ずれのスケール  $\lambda$  とその振幅  $\alpha$  に対する実験・観測データからの制限をまとめたものである。このように、ニュートンの逆二乗則は、太陽系のサイズである 40AU ( $\approx 6 \times 10^{12}$ m) あたりまでは高い精度で検証されているものの、宇宙膨張が重要となってくる 1Mpc ( $\approx 3 \times 10^{22}$ m) 以上のスケールでは直接検証されてはいない。とすれば、加速膨張とは宇宙論的スケールでの一般相対論の限界を示しているのかもしれない。

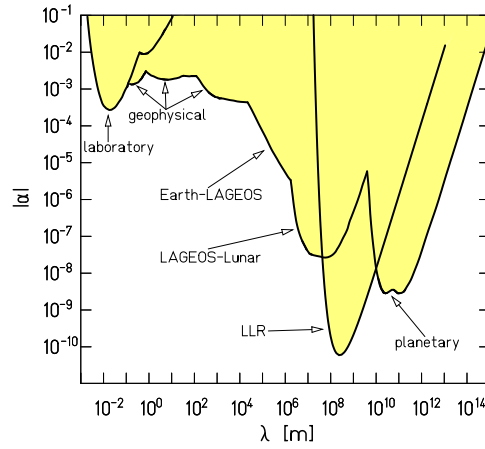


図 2.4: 重力の逆二乗則からのずれに対する制限 (95%信頼度)。

この考え方はかなり大胆なものではあるが、そもそも一般相対論は古典論であり量子論的な補正は必然であること (ただしこれはミクロなスケールの話である)、さらに最近の高次元宇宙モデルの可能性などを考慮すれば、ただちに否定できるようなものではない。というか、宇宙定数が実在するという考え方もそれと同等以上に大胆なものであることは認識しておくべきである。

### 2.9.5 ダークエネルギーに対する制限

再度 (2.9.20) 式を眺めてみる。実はこの右辺の宇宙定数  $\Lambda$  は、本来の一般相対論的思想から言えば左辺におくべきだった。この式のもととなるアインシュタイン方程式は、左辺が時空の幾何学に対応し右辺がそれを規定する物質場に対応する、という構造を持つ。宇宙定数は本来宇宙に実在する物質の一形態としてではなく、時空の幾何学的性質のもつ自由度として存在を保証されていたに過ぎない。しかしながら、現在では (2.9.20) 式のように宇宙定数を右辺に移行し、物質場として解釈するほうが普通である。この解釈のもとでは、(2.9.20) 式はむしろ

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G a}{3} [\rho + \rho_\Lambda + 3(p + p_\Lambda)], \quad (2.9.42)$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.9.43)$$

と書いた方がすっきりする。宇宙定数はエネルギー密度  $\rho_\Lambda$  と圧力  $p_\Lambda$  を持つ物質場に他ならないこと、ただしその場合、圧力が負になることが明確になる。ここまでくれば宇宙定数が極めて特殊な例にしか過ぎないことが認識されて来る。当然、

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G a}{3} [\rho + \rho_x + 3(p + p_x)], \quad (2.9.44)$$

と書き、状態方程式

$$p_x = w\rho_x \quad (2.9.45)$$

に従う「ダークエネルギー」へ一般化して考えたくなるはずだ。この文脈では宇宙定数は  $w = -1$  というある特別な例にしか過ぎない。しかしながら、本来アインシュタイン方程式の左辺に導入された宇宙定数には、(2.9.45) 式のような自由度は許されず、その意味でも観測的に  $w = -1$  かどうかを突き詰めることは重要な意義をもつ。

(2.9.45) 式で  $w$  が定数の場合には、ダークエネルギー密度は  $\rho_x \propto (1+z)^{3(w+1)}$  という時間依存性を持つことが示されるので、(2.9.37) 式は

$$\frac{1}{aH_0^2} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{\Omega_m}{2}(1+z)^3 - \frac{(1+3w)\Omega_x}{2}(1+z)^{3(w+1)}, \quad (2.9.46)$$

と一般化される。したがって加速膨張の条件は

$$\Omega_m + (1+3w)\Omega_x(1+z)^{3w} < 0 \quad (2.9.47)$$

である。平坦な宇宙 ( $\Omega_m + \Omega_x = 1$ ) を仮定した時には  $z = 0$  での加速膨張の条件である (2.9.47) 式は

$$w < -\frac{1}{3(1-\Omega_m)} \quad (2.9.48)$$

に帰着する。現時点での観測的制限を組み合わせると、

$$w = -1.023 \pm 0.090(\text{統計誤差}) \pm 0.054(\text{系統誤差}) \quad (2.9.49)$$

となり、ダークエネルギーは実質的には宇宙定数に近いようだ。

## 第3章 重力波

### 3.1 アインシュタイン方程式の弱場近似

弱い重力場：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3.1.1)$$

の場合に限定して考えることにする<sup>1</sup>。したがって、

$$g_{\mu\nu}(\text{時空}) = \eta_{\mu\nu}(\text{不変な媒質} = \text{容れ物}) + h_{\mu\nu}(\text{変化する媒体} = \text{時空の波動}) \quad (3.1.2)$$

という描像が可能になる。

以下、アインシュタイン方程式を  $h_{\mu\nu}$  に関して線形化したものを計算してみよう。まず、クリストッフェル記号は

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &\equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}) \\ &\equiv \frac{1}{2}(h^\alpha_{\beta,\gamma} + h^\alpha_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}{}^\alpha) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

となる。ここで、 $h_{\mu\nu}$  自身は厳密な意味でのテンソルではないので、その添字の上げ下げはまだ定義されていない。そこで、一般のテンソルと同じく  $g_{\mu\nu}$  によって上げ下げを行うものとする、 $h_{\mu\nu}$  に関する1次の項までを考える限り、 $\eta_{\mu\nu}$  を用いた結果でよいことになる。したがって、(3.1.3)式では、 $h^\alpha_{\beta,\gamma} \equiv \eta^{\alpha\mu}h_{\mu\beta,\gamma}$  のように定義した。以下もこの定義を用いる。

同様にリッチテンソルを計算すると、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \underbrace{\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\gamma} - \Gamma^\gamma_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\gamma}}_{=O(h^2)} \\ &\approx \frac{1}{2}[(h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - h_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\alpha) - (h^\alpha_{\mu,\alpha\nu} + h^\alpha_{\alpha,\mu\nu} - h_{\nu\alpha}{}^\alpha{}_\nu)] \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>(3.1.1)式は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

の高次項を無視した近似式であるという立場と、

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$$

によって  $h_{\mu\nu}$  を定義したものとする立場の二つがあり得る。事実上はこの両者でほとんど違いはないのであえて意識する必要はないが、理論的定式化において解釈が異なる場合もある(例えば、重力場のエネルギー-運動量擬テンソル)ので注意が必要である。

$$= \frac{1}{2}(h^\alpha{}_{\nu,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha,{}^\alpha\nu} - h_{\mu\nu,{}^\alpha\alpha} - h_{,\mu\nu}). \quad (3.1.4)$$

ここで、 $h$  は  $h_{\mu\nu}$  のトレイス：

$$h \equiv h^\alpha{}_\alpha \equiv \eta^{\alpha\mu} h_{\alpha\mu} \quad (3.1.5)$$

である。(3.1.4) 式を縮約するとスカラー曲率は、

$$R = R^\beta{}_\beta \approx \frac{1}{2}(h^\alpha{}_{\beta,{}^\beta\alpha} + h^{\beta\alpha,{}^\alpha\beta} - h^{\beta\beta,{}^\alpha\alpha} - h^{\beta,{}^\beta}) = h_{\alpha\beta,{}^\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^\beta. \quad (3.1.6)$$

以上を組み合わせてアインシュタインテンソルを書き下す。まず、

$$2G_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = h_{\mu\alpha,{}^\alpha\nu} + h_{\nu\alpha,{}^\alpha\mu} - h_{\mu\nu,{}^\alpha\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta,{}^\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^\beta). \quad (3.1.7)$$

ここで、

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (3.1.8)$$

を定義すると、

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^\mu{}_\mu = h^\mu{}_\mu - \frac{1}{2} \times 4h = -h \quad (3.1.9)$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \quad (3.1.10)$$

これを用いて (3.1.7) 式を書き直すと

$$2G_{\mu\nu} = \underbrace{-\bar{h}_{\mu\nu,{}^\alpha\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,{}^\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,{}^\alpha\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha,{}^\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\bar{h}_{,\nu}{}^\alpha - \frac{1}{2}\eta_{\nu\alpha}\bar{h}_{,\mu}{}^\alpha + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}_{,\alpha}{}^\alpha + \bar{h}_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{,\beta}{}^\beta\right)}_{=0}. \quad (3.1.11)$$

さらに、座標系の選びかたの 4 自由度を用いて以下の座標条件 (ゲージ条件)：

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad (3.1.12)$$

を採用する。具体的に  $x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu$  とおくと (ただし  $\xi^\mu \ll x^\mu$  とする)、

$$\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \approx (\delta^\alpha{}_\mu - \xi^\alpha{}_{,\mu})(\delta^\beta{}_\nu - \xi^\beta{}_{,\nu})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}). \quad (3.1.13)$$

したがって、

$$h'_{\mu\nu} \approx h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,{}^\nu} - \xi_{\nu,{}^\mu}, h' \approx h - 2\xi^{\mu,{}^\mu} \Rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,{}^\nu} - \xi_{\nu,{}^\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\beta,{}^\beta}. \quad (3.1.14)$$

これらより、

$$\bar{h}'^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} - \xi^{\mu,{}^\alpha}{}_{,\alpha} + \underbrace{\eta^{\mu\alpha}\xi_{\beta,{}^\beta}{}_{,\alpha} - \xi^{\alpha,{}^\mu}{}_{,\alpha}}_{=0} \quad (3.1.15)$$



となるので、

$$\square \xi^\mu = -\frac{\partial \bar{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} \quad (3.1.16)$$

となるような  $\xi^\mu$  を選べば、一般性を失うことなくゲージ条件 (3.1.12) 式を課せることがわかる。

結局 アインシュタイン方程式は

$$2G_{\mu\nu} = 16\pi GT_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad -\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = -\square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.1.17)$$

という波動方程式に帰着する。その解は形式的に

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{ret})} + \bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{in})} \quad (3.1.18)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{ret})} = 4G \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \quad (3.1.19)$$

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(\text{in})} = 0 \quad (3.1.20)$$

と書ける。この光速で伝搬する波動解を重力波と呼ぶ。

## 3.2 重力波の平面波解

真空中を伝搬する重力波：

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.2.1)$$

の単色平面波解：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (3.2.2)$$

を具体的に求めてみよう ( $a_{\mu\nu}$  は偏光テンソル)。この  $\bar{h}_{\mu\nu}$  は複素数であるが、電磁場  $A^\mu$  の場合などと同様に、実際にはその実部をとることを注意しておく。

まず、

$$\bar{h}_{\mu\nu} \text{ は対称テンソル： } a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (3.2.3)$$

$$\text{ゲージ条件 (3.1.12) 式： } a_{\mu\alpha} k^\alpha = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\text{波動方程式 (3.2.1) 式： } k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (3.2.5)$$

より、 $a_{\mu\nu}$  は  $10 - 4 = 6$  の独立な自由度を持つように思えるが、実は本当は 2 自由度しかない。これは (3.1.16) 式からもわかるように、(3.1.12) 式を満たすように選んだ  $\xi^\mu$  に  $\square \chi^\mu = 0$  を満たす  $\chi^\mu$  (これも無限小量であるとする) を付け加える自由度が残っているからである。(3.1.14) 式と (3.1.15) 式において、 $\xi^\mu \rightarrow \xi^\mu + \chi^\mu$  とおいた式を再度書いてみれば、

$$\bar{h}''_{\mu\nu} = \bar{h}'_{\mu\nu} - \chi_{\mu,\nu} - \chi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \chi_{\beta}{}^{\beta}, \quad (3.2.6)$$

$$\bar{h}''^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \bar{h}'^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} - \chi^{\mu,\alpha}{}_{,\alpha}. \quad (3.2.7)$$

したがって、 $\square\chi^\mu = 0$  をみたま限り、 $\chi^\mu$  の自由度の存在はゲージ条件 (3.1.12) 式には影響しない。

より具体的に

$$\chi^\mu = -ic^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (c^\mu \text{は定数}) \quad (3.2.8)$$

と置くと、 $\square\chi^\mu = 0$  は満たされ、かつ (3.2.6) 式より

$$a_{\mu\nu} \rightarrow a_{\mu\nu} - c_\mu k_\nu - c_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu} c^\beta k_\beta \quad (3.2.9)$$

となる。この式からも  $a_{\mu\nu}$  の 6 自由度のうち 4 つはこのゲージ自由度に対応していることがわかる。したがって、重力波の本当の自由度は  $10-4-4=2$  ということになる。

以上の議論をふまえて、重力波の振幅  $h_{\mu\nu}$  の 10 個の成分に対して次の 8 つの条件を課すことがよく行われ、これを TT (Transverse - Traceless) ゲージと呼ぶ。

$$h_{\mu 0} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{空間成分のみ} \quad (3.2.10)$$

$$h_{ij}{}^{,j} = 0 \quad \leftrightarrow \quad k_l \text{方向に進む波を考えると } h_{il} = 0 \text{ (進行方向と直交 transverse)} \quad (3.2.11)$$

$$h^j{}_j = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{traceless } (\bar{h}_{ij} \text{ と } h_{ij} \text{ は同じ}) \quad (3.2.12)$$

具体的に  $z$  方向に進む単色平面波：

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = a_{\mu\nu} \exp[-iw(t-z)] \quad (3.2.13)$$

を考えてみる。(3.2.10) 式 ~ (3.2.12) 式は、

$$a_{\mu 0} = 0, \quad a_{i3} = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 0 \quad (3.2.14)$$

となるので、

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv a^+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a^\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

に帰着する。

具体的に、(3.2.15) 式のような成分を持つ重力波 (3.2.13) が  $z$  方向から入射したとすると、ミンコフスキー時空の空間的線素は

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx^i dx^j \\ \Rightarrow dl^2 &= (\delta_{ij} + h_{ij}^{\text{TT}}) dx^i dx^j \\ &= [1 + a^+ \cos w(t-z)] dx^2 + [1 - a^+ \cos w(t-z)] dy^2 + dz^2 \\ &\quad + 2a^\times \cos w(t-z) dx dy \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

のように変化することになる。ただし、今まで単に  $h_{ij}$  と記して来たものは複素数表示で実際にはその実部をとるということを用いた。(3.2.16) 式を眺めると、 $w(t-z)$  の値に応じて  $xy$  平面上での距離が、まさに + と  $\times$  という記号の示す通りの偏光モード  $a^+$ ,  $a^\times$  にしたがって変化することがわかる。

### 3.3 測地線偏差の方程式と重力波検出原理

近接した2点  $x^\mu$  と  $x^\mu + \xi^\mu$  にある質点が何らかの外力  $F_{\text{ext}}^\mu$  を受けて運動しているものとする ( $\xi^\mu \ll x^\mu$ )。それらの運動方程式は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = F_{\text{ext}}^\mu(x) \quad (3.3.1)$$

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x + \xi) \frac{d(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau} \frac{d(x^\beta + \xi^\beta)}{d\tau} = F_{\text{ext}}^\mu(x + \xi). \quad (3.3.2)$$

これらの差をとって、 $\xi^\mu$  の一次まで書き下すと

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma}(x) \xi^\gamma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = f_{\text{ext}}^\mu \equiv F_{\text{ext},\nu}^\mu \xi^\nu \quad (3.3.3)$$

共変性が明白になるように、絶対微分：

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\mu{}_{;\beta} = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (3.3.4)$$

を用いて (3.3.3) 式を書き直すことにする。まず、

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{D\xi^\mu}{D\tau} \right) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{D\xi^\alpha}{D\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\alpha \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \left( \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \xi^\alpha \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} \right) \\ &\quad + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \left( \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \xi^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) \\ &= \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &\quad - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\rho\sigma} \xi^\alpha \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \xi^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + (\Gamma^\mu_{\beta\alpha,\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\nu} \Gamma^\nu_{\alpha\gamma} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \Gamma^\nu_{\beta\gamma}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

これを用いると、(3.3.3) 式は

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} + \underbrace{(\Gamma^\mu_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta})}_{=R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} &= f_{\text{ext}}^\mu \\ \Rightarrow \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} + R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} &= f_{\text{ext}}^\mu \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

となる。なお、(3.3.6) 式の各項はそれぞれが共変性をもつベクトルとなっている。

地上の観測者に対しては近似的に

$$d\tau \approx dt, \quad \frac{dx^0}{d\tau} \approx 1, \quad \frac{dx^i}{d\tau} \approx 0 \quad (3.3.7)$$

が成り立つので、(3.3.6) 式は

$$\frac{d^2 \xi^j}{dt^2} + R^j{}_{0k0} \xi^k = f_{\text{ext}}^j \quad (3.3.8)$$

となる。ここで、TT ゲージでは空間成分以外は 0 なので

$$\Gamma^j_{00} \approx \frac{1}{2}(2h^j_{0,0} - h_{00}{}^{,j}) \approx 0 \quad (3.3.9)$$

$$\Gamma^j_{0k} \approx \frac{1}{2}(h^j_{0,k} + h^j_{k,0} - h_{0k}{}^{,j}) = \frac{1}{2}h^j_{k,0} \quad (3.3.10)$$

であることに注意すると、

$$R^j_{0k0} \approx \Gamma^j_{00,k} - \Gamma^j_{0k,0} + O(h^2) \approx -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^j_k}{\partial t^2}. \quad (3.3.11)$$

したがって、(3.3.8) 式は

$$\frac{d^2 \xi^j}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^{\text{TT}j}_k}{\partial t^2} \xi^k + f^j_{\text{ext}} = f^j_{\text{GW}} + f^j_{\text{ext}} \quad (3.3.12)$$

に帰着する。ここで、右辺の第一項は重力波による実効的な力であるとみなすことができる。二点間の距離  $\xi^j$  を

$$\xi^j = \xi_0^j + \Delta \xi^j_{\text{GW}} \quad (3.3.13)$$

とにおいて、(3.3.12) 式より、重力波  $h^{\text{TT},j}_k \sim h e^{-i\omega t}$  の入射によって引き起こされる  $\Delta \xi^j_{\text{GW}}$  の大きさを見積もってみる。

#### (i) レーザー干渉計検出器

2つのおもりを外力のない ( $f^j_{\text{ext}} = 0$ ) 状態で遠く離し ( $\xi_0 \sim 100\text{km}$ )、レーザー干渉計を用いてその距離の微小変化

$$\Delta \xi_{\text{GW}} \approx 10^{-16} \left( \frac{h}{10^{-21}} \right) \left( \frac{\xi_0}{100\text{km}} \right) \text{m} \quad (3.3.14)$$

を精密測定するものである。これは、(0.1 ~ 10)kHz の広い周波数領域をカバーすることができ、現在最も有望な手法であると考えられている。

#### (ii) 共振型検出器

特定の振動数  $w$  をもつ重力波に対しては、共振振動数  $w_0 (\approx w)$  をもつ弾性体の振動を利用する方法も考えられる。この場合、弾性体は重力波の外力に対応して

$$\frac{d^2 \Delta \xi_{\text{GW}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau_Q} \frac{d \Delta \xi_{\text{GW}}}{dt} + w_0^2 \Delta \xi_{\text{GW}} = -w^2 h \xi_0 \quad (3.3.15)$$

という強制振動を行う。減衰時間  $\tau_Q$  は、振動体の  $Q$  値と共振振動数  $w_0$  を用いると  $Q/w_0$  である。これから桁を見積もると、

$$\Delta \xi_{\text{GW}} \approx \left| \frac{w^2 h \xi_0}{w_0^2 - w^2 - i w_0 / \tau_Q} \right| \approx w_0 \tau_Q h \xi_0 = 10^{-15} \left( \frac{Q}{10^6} \right) \left( \frac{h}{10^{-21}} \right) \left( \frac{\xi_0}{1\text{m}} \right) \text{m} \quad (3.3.16)$$

となる。