第2章　球対称時空

2.1　球対称時空に対する計量とアインシュタイン方程式

球対称という仮定のもとで時空の計量の一般的な形を導いておこう．球座標 (r, θ, φ) を用いれば、計量の成分は角度座標に依存してはならないから

$$
\begin{aligned}
ds^2 = -A(r,t)\,dt^2 + B(r,t)\,dtdr + C(r,t)\,dr^2 \\
+ D(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

という形になることはすぐわかる．さらに，r と t に関する座標変換の自由度が 2 つあることを用いれば

$$
\begin{cases} r = f_1(r', t') \\ t = f_2(r', t') \end{cases} \iff \begin{cases} D(r,t) = r'^2 \\ B(r,t) = 0 \end{cases}
\tag{2.1.2}
$$

という 2 つの条件を満たすように新たな座標 r' と t' を選ぶことができるはずである．その上で，

$$
A(r,t)dt^2 \equiv e^{2\phi(r',t')}dt'^2, \quad C(r,t)dr^2 \equiv e^{2\lambda(r',t')}dr'^2
\tag{2.1.3}
$$

とおいて，あらためて (r', t') を (r, t) と再定義すれば

$$
ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)
\tag{2.1.4}
$$

となる．これが球対称時空の一般的な線素である。

しかし、天体の重力収縮のように時間的に半径が変化する現象を記述する際は、

$$
\begin{cases} r = f_1(r', t') \\ t = f_2(r', t') \end{cases} \iff \begin{cases} D(r,t) = \chi^2(r', t') \\ B(r,t) = 0 \end{cases}
\tag{2.1.5}
$$

と選ぶ方が物理的に理解しやすい。つまり、動径座標 r と実際の半径 $\chi(r,t)$ を区別するわけだ。この場合、(2.1.4) 式は

$$
ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}dr^2 + \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)
\tag{2.1.6}
$$

となる。例えば、r はそのなかの質量が時間的に不変となるようなラベルだと考えて、$\chi(r,t)$ はその内側にある質量 $m = m(r)$ が一定となるような半径がどう時間変化するかを表す関数である、と解釈すれば良い。

この時空に対して 0 でない値をとるクリストッフェル記号は以下の通りである。

$$\begin{cases} \Gamma^t{}_{tt} = \dot\phi & \Gamma^t{}_{rr} = \dot\lambda e^{2\lambda-2\phi} & \Gamma^t{}_{rt} = \Gamma^t{}_{tr} = \phi' \\ \Gamma^t{}_{\theta\theta} = \dot\chi\chi e^{-2\phi} & \Gamma^t{}_{\varphi\varphi} = \dot\chi\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta & \\ \Gamma^r{}_{rr} = \lambda' & \Gamma^r{}_{tt} = \phi' e^{2\phi-2\lambda} & \Gamma^r{}_{rt} = \Gamma^r{}_{tr} = \dot\lambda \\ \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\chi'\chi e^{-2\lambda} & \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta & \\ \Gamma^\theta{}_{t\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta t} = \dfrac{\dot\chi}{\chi} & \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \dfrac{\chi'}{\chi} & \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^\varphi{}_{t\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi t} = \dfrac{\dot\chi}{\chi} & \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = \dfrac{\chi'}{\chi} & \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \cot\theta. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

これらのクリストッフェル記号からリッチテンソル

$$R_{\alpha\beta} \equiv \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\mu} \tag{2.1.8}$$

を求めれば、アインシュタインテンソル:

$$G^\alpha{}_\beta = R^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta R^\mu{}_\mu \tag{2.1.9}$$

が計算できる。その結果を用いて、アインシュタイン方程式:

$$G^\alpha{}_\beta = 8\pi G T^\alpha{}_\beta \tag{2.1.10}$$

を具体的に書き下せば、

$$8\pi G T^t{}_t = G^t{}_t = -\left(\frac{2\dot\chi\dot\lambda}{\chi} + \frac{\dot\chi^2}{\chi^2}\right)e^{-2\phi} + \left(\frac{2\chi''}{\chi} + \frac{\chi'^2}{\chi^2} - \frac{2\chi'\lambda'}{\chi}\right)e^{-2\lambda} - \frac{1}{\chi^2} \tag{2.1.11}$$

$$8\pi G T^t{}_r = G^t{}_r = \frac{2e^{-2\phi}}{\chi}(\dot\chi\phi' + \dot\lambda\chi' - \dot\chi') \tag{2.1.12}$$

$$8\pi G T^r{}_r = G^r{}_r = \left(\frac{2\chi'\phi'}{\chi} + \frac{\chi'^2}{\chi^2}\right)e^{-2\lambda} - \left(\frac{2\ddot\chi}{\chi} + \frac{\dot\chi^2}{\chi^2} - \frac{2\dot\chi\dot\phi}{\chi}\right)e^{-2\phi} - \frac{1}{\chi^2} \tag{2.1.13}$$

$$\begin{aligned} 8\pi G T^\theta{}_\theta = G^\theta{}_\theta = &-\left(\ddot\lambda + \dot\lambda^2 - \dot\phi\dot\lambda - \frac{\dot\chi\dot\phi}{\chi} + \frac{\ddot\chi}{\chi} + \frac{\dot\chi\dot\lambda}{\chi}\right)e^{-2\phi} \\ &+ \left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \frac{\chi'\phi'}{\chi} - \frac{\chi'\lambda'}{\chi} + \frac{\chi''}{\chi}\right)e^{-2\lambda} \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

となる。(φ,φ) 成分は (θ,θ) 成分と全く同じ結果を与える。また、これら以外の成分はすべて 0 である。

2.2 完全流体に対するエネルギー運動量保存則

アインシュタイン方程式の右辺にくる物質場として重要なのは、完全流体[1]である。これはその流体と一緒になって動く静止系から観測したときに，圧力が等方的、かつ粘性や熱

[1]perfect fluid の訳。理想流体 (ideal fluid) と呼ばれることもある。

伝導がない場合である。そのエネルギー運動量テンソルは、

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad T^\mu{}_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\delta^\mu{}_\nu \tag{2.2.1}$$

で与えられる。ここで，u^μ は (観測者の系から測定したときの) 流体の 4 元速度，ρ と p はそれぞれ流体の静止系で観測したときのエネルギー密度と圧力である。

このように $T^\mu{}_\nu$ は考えている u^μ によって複雑となりうる。ただし、球対称問題においては流体の運動も球対称に限られるので、球座標を選んで流体の運動とともに動く座標系 (共動座標系) を (r, θ, φ) とすれば、その系から見れば流体は静止している[2]。すなわち、この系では、流体の 4 元速度 $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ が

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = e^{-\phi} \ (u_t = g_{tt}u^t = -e^\phi), \quad u^r = u^\theta = u^\varphi = 0 \tag{2.2.2}$$

となる。非球対称の場合には場所ごとに流体は複雑な運動をするため、このような単純な静止系を座標に選ぶことができず、問題が難しくなる。

(2.2.2) 式を (2.2.1) 式に代入すれば、静止系におけるエネルギー運動量テンソル:

$$T_{tt} = \rho e^{2\phi}, \quad T_{rr} = p e^{2\lambda}, \quad T_{\theta\theta} = p\chi^2, \quad T_{\varphi\varphi} = p\chi^2 \sin^2\theta \tag{2.2.3}$$

$$T^t{}_t = -\rho, \quad T^r{}_r = T^\theta{}_\theta = T^\varphi{}_\varphi = p \tag{2.2.4}$$

が得られる。このように共動座標系を選ぶことで、エネルギー運動量テンソルは対角化された単純な表式となる。

完全流体に対するアインシュタイン方程式を具体的に議論する前に、対応するエネルギー運動量保存則 $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ を調べておこう。その際には、2 階対称テンソルに対して成り立つ公式:

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu)}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}T^{\mu\alpha} \tag{2.2.5}$$

を使うと少し計算が楽である。ここで g は $g_{\mu\nu}$ の行列式で負の値をとる。(2.1.6) 式の線素の場合、計量は対角化されているので

$$\sqrt{-g} = e^{\phi+\lambda}\chi^2 \sin\theta \tag{2.2.6}$$

と簡単に計算できる。

これらを用いて (2.2.5) 式を計算してみよう。まず、t-成分は

$$\begin{aligned} T^\mu{}_{t;\mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}T^\mu{}_t)}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial t}T^{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}T^t{}_t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\dot{g}_{tt}T^{tt} + \dot{g}_{rr}T^{rr} + \dot{g}_{\theta\theta}T^{\theta\theta} + \dot{g}_{\varphi\varphi}T^{\varphi\varphi}\right) \\ &= -\frac{1}{e^{\phi+\lambda}\chi^2}\frac{\partial(\rho e^{\phi+\lambda}\chi^2)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(2\dot{\phi}T^t{}_t + 2\dot{\lambda}T^r{}_r + 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}T^\theta{}_\theta + 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}T^\varphi{}_\varphi\right) \\ &= -\dot{\rho} - 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}\rho - \dot{\phi}\rho - \dot{\lambda}\rho + \dot{\phi}\rho - \left(\dot{\lambda} + 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}\right)p = 0. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

[2]混乱する言い方かもしれないが、この意味では「共動座標系=流体の静止系」ということになる。

同様にして r-成分は

$$
\begin{aligned}
{T^\mu}_{r;\mu} &= \frac{1}{e^{\phi+\lambda}\chi^2}\frac{\partial(\rho e^{\phi+\lambda}\chi^2)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(-2\phi'\rho + 2\lambda' p + 4\frac{\chi'}{\chi}p\right) \\
&= p' + \phi'\rho + \phi' p = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.8}
$$

残る θ-成分と φ-成分は

$$
{T^\mu}_{\theta;\mu} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(p\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}p = \frac{\partial p}{\partial\theta} = 0, \tag{2.2.9}
$$

$$
{T^\mu}_{\varphi;\mu} = \frac{\partial p}{\partial\varphi} = 0, \tag{2.2.10}
$$

のように自明な式でしかない。

このように、直接アインシュタイン方程式を経由することなくエネルギー運動量保存則だけから得られる方程式は

$$
\dot\rho + \left(\dot\lambda + 2\frac{\dot\chi}{\chi}\right)(\rho + p) = 0, \tag{2.2.11}
$$

$$
\phi' + \frac{1}{\rho+p}p' = 0 \tag{2.2.12}
$$

の 2 つである。

2.3 球対称時空における完全流体の運動方程式

完全流体のエネルギー運動量テンソル (2.2.4) 式を (2.1.11) – (2.1.14) 式に代入すれば、対応するアインシュタイン方程式:

$$
-8\pi G\rho\chi^2 = -(2\dot\chi\dot\lambda\chi + \dot\chi^2)e^{-2\phi} + (2\chi''\chi + \chi'^2 - 2\chi'\lambda'\chi)e^{-2\lambda} - 1 \tag{2.3.1}
$$

$$
0 = \dot\chi\phi' + \dot\lambda\chi' - \dot\chi' \tag{2.3.2}
$$

$$
8\pi Gp\chi^2 = (2\chi'\phi'\chi + \chi'^2)e^{-2\lambda} - (2\ddot\chi\chi + \dot\chi^2 - 2\dot\chi\dot\phi\chi)e^{-2\phi} - 1 \tag{2.3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
8\pi Gp\chi^2 = &-(\ddot\lambda\chi^2 + \dot\lambda^2\chi^2 - \dot\phi\dot\lambda\chi^2 - \dot\chi\dot\phi\chi + \ddot\chi\chi + \dot\chi\dot\lambda\chi)e^{-2\phi} \\
&+ (\phi''\chi^2 + \phi'^2\chi^2 - \lambda'\phi'\chi^2 + \chi'\phi'\chi - \chi'\lambda'\chi + \chi''\chi)e^{-2\lambda}
\end{aligned} \tag{2.3.4}
$$

が得られる。今の場合、変数は ϕ, λ, χ, ρ, p の 5 個であるが、独立な方程式は 4 つしかないので、条件が一つ足りない。通常それを補うのが、圧力 p とエネルギー密度 ρ の関係を与える状態方程式 $p = p(\rho)$ である。

上記のアインシュタイン方程式はかなり複雑な形に見えるが、整理すればニュートン力学に基づいた流体の方程式系との対応関係がよりわかりやすいような方程式系に変形できる。その際には、これらとは独立ではないものの (2.2.11) 式と (2.2.12) 式も適宜利用すると便利である。

2.3.1 アインシュタイン方程式の tt 成分の変形

まず、r は共動座標系からみると時間変化しないが、$\chi(r,t)$ は変化することに注意し[3]、$d\tau \equiv e^{\phi}dt$ で定義される共動座標系の固有時間で χ を微分した「速度」:

$$u \equiv \frac{\partial\chi}{\partial\tau} = \frac{1}{e^{\phi}}\frac{d\chi}{dt} = e^{-\phi}\dot{\chi} \tag{2.3.5}$$

を導入する。このとき

$$u' = (e^{-\phi}\dot{\chi})' = e^{-\phi}(\dot{\chi}' - \phi'\dot{\chi}) \underbrace{=}_{(2.3.2)\text{ より}} e^{-\phi}\dot{\lambda}\chi' \tag{2.3.6}$$

だから、

$$2e^{-\phi}\chi u\dot{\lambda} = 2\chi u\frac{u'}{\chi'} = \chi\frac{\partial u^2}{\partial\chi}. \tag{2.3.7}$$

さらに、天下り的ではあるが

$$\Gamma \equiv e^{-\lambda}\chi' \tag{2.3.8}$$

を定義すると

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(\chi\Gamma^2) = \Gamma^2 + 2\chi\Gamma\frac{\partial\Gamma}{\partial\chi} = e^{-2\lambda}(\chi'^2 + 2\chi\chi'' - 2\chi\chi'\lambda') \tag{2.3.9}$$

である。

(2.3.5) 式、(2.3.7) 式、及び (2.3.9) 式を (2.3.1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} 8\pi G\rho\chi^2 &= 1 + u^2 + \chi\frac{\partial u^2}{\partial\chi} - \underbrace{(2\chi''\chi + \chi'^2 - 2\chi'\lambda'\chi)e^{-2\lambda}}_{=\partial(\chi\Gamma^2)/\partial\chi} \\ &= \frac{\partial}{\partial\chi}\left[\chi(1 + u^2 - \Gamma^2)\right]. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

これを積分して

$$\Gamma = \sqrt{1 + u^2 - \frac{2G}{\chi}\int_0^{\chi} 4\pi\rho\chi^2 d\chi} \tag{2.3.11}$$

を得る。この積分定数は原点 $(r=0)$ 近傍では平坦な空間であると仮定し[4]

$$e^{2\lambda}d^2r \approx d^2\chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma = e^{-\lambda}\frac{\partial\chi}{\partial r} \approx 1(r=0, \chi=0) \tag{2.3.12}$$

となるように定めた。(2.3.11) 式に登場する積分:

$$m(r,t) \equiv \int_0^{\chi(r,t)} 4\pi\rho\chi^2 d\chi \tag{2.3.13}$$

[3] r をラグランジュ座標、χ をオイラー座標と解釈しても良い。
[4] 原点が特異点でないことが必要。例えば、原点に有限な質点をおいた場合はあてはまらない。

は、半径 r の球の「質量」と解釈することができる。結局、(2.3.1) 式は

$$\Gamma^2 \equiv (e^{-\lambda}\chi')^2 = 1 + u^2 - \frac{2Gm}{\chi}, \tag{2.3.14}$$

に帰着する。ところで、この式を少し変形すれば

$$\frac{1}{2}u^2 - \frac{Gm(r,t)}{\chi} = \frac{\Gamma^2 - 1}{2} \tag{2.3.15}$$

となることからもわかるように、右辺は単位質量あたりの流体のエネルギーに対応する。

2.3.2 アインシュタイン方程式の rr 成分の変形

(2.3.5) 式の時間微分を計算すれば

$$\dot{u} = \ddot{\chi}e^{-\phi} - \dot{\chi}\dot{\phi}e^{-\phi}. \tag{2.3.16}$$

これを用いて (2.3.3) 式を変形すると

$$\begin{aligned} 8\pi Gp\chi^2 &= (2\chi'\phi'\chi + \chi'^2)e^{-2\lambda} - (2\ddot{\chi}\chi + \dot{\chi}^2 - 2\dot{\chi}\dot{\phi}\chi)e^{-2\phi} - 1 \\ &= \left(2\chi\frac{\phi'}{\chi'} + 1\right)\Gamma^2 - u^2 - 2\chi\dot{u}e^{-\phi} - 1 \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

さらに、(2.2.12) 式と (2.3.14) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} 8\pi Gp\chi^2 &= -\frac{2\chi\Gamma^2}{\rho+p}\frac{\partial p}{\partial\chi} - 2\chi\dot{u}e^{-\phi} - \frac{2Gm}{\chi} \\ \Rightarrow \quad e^{-\phi}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1+u^2-2Gm/\chi}{\rho+p}\frac{\partial p}{\partial\chi} - \frac{Gm}{\chi^2} - 4\pi Gp\chi. \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

2.3.3 まとめ

最後に (2.2.11) 式に (2.3.7) 式と (2.3.5) 式を代入すると

$$\dot{\rho} + \left(\frac{u'}{\chi'}e^{\phi} + 2\frac{u}{\chi}e^{\phi}\right)(\rho+p) = 0. \tag{2.3.19}$$

これで変形は完了である。まとめると、座標 r と時間 t の関数である 6 つの独立変数を、速度 u、半径 χ、質量 m、圧力 p、エネルギー密度 ρ、に加えて $\phi(=\log\sqrt{g_{rr}})$ と選べば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -e^{\phi}\left[\frac{1}{\rho+p}\left(1+u^2-2\frac{Gm}{\chi}\right)\frac{\partial p}{\partial\chi} + \frac{Gm}{\chi^2} + 4\pi Gp\chi\right] \tag{2.3.20}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = e^{\phi}u \tag{2.3.21}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -e^{\phi}\left(\frac{u'}{\chi'} + 2\frac{u}{\chi}\right)(\rho+p) \tag{2.3.22}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{\rho+p}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{2.3.23}$$

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi\rho\chi^2\frac{\partial\chi}{\partial r} \tag{2.3.24}$$

となる。

2.4 圧力が無視できる物質の球対称重力収縮

まず (2.3.23) 式より、$p=0$ の場合 ϕ は動径座標 r には依存せず時間のみの関数となる。この場合 $e^{\phi}dt \to dt$ と再定義すれば (2.3.20) 式〜(2.3.24) 式に ϕ はもはや登場しない。したがって、(2.3.8) 式を時間について微分して (2.3.6) 式を用いれば

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\lambda}\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)=\left(-\frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial t}\right)e^{-\lambda}=\left(-\frac{u'}{\chi'}\chi'+\frac{\partial u}{\partial r}\right)e^{-\lambda}=0. \tag{2.4.1}$$

つまり、$p=0$ の場合 Γ は時間に依存しない r のみの関数となる。したがってダスト宇宙では (2.1.6) 式を

$$ds^2=-e^{2\phi(r)}dt^2+\left(\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{\partial\chi(r,t)}{\partial r}\right)^2dr^2+\chi^2(r,t)\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \tag{2.4.2}$$

と書き直すことができる。

(2.3.14) 式を時間で微分した結果に、(2.3.20) 式と (2.3.21) 式を (ただし $p=0$、したがって $\phi=0$ とする) 代入すれば

$$2\Gamma\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=2u\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{2G}{\chi}\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{2Gm}{\chi^2}\frac{\partial\chi}{\partial t}=-\frac{2G}{\chi}\frac{\partial m}{\partial t} \tag{2.4.3}$$

となる。したがって、Γ と同じく m もまた時間に依存しない r のみの関数であることがわかる。この場合 (2.3.14) 式:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=\sqrt{\Gamma^2(r)-1+\frac{2Gm(r)}{\chi}}\quad\Rightarrow\quad t=\int\sqrt{\frac{\chi}{2Gm+(\Gamma^2-1)\chi}}d\chi \tag{2.4.4}$$

は以下のように積分できる。

$$t_0(r)-t=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2Gm\chi+(\Gamma^2-1)\chi^2}}{\Gamma^2-1}-\dfrac{2Gm}{(\Gamma^2-1)^{3/2}}\sinh^{-1}\sqrt{\dfrac{(\Gamma^2-1)\chi}{2Gm}} & (\Gamma^2-1>0)\\ \sqrt{\dfrac{2}{9Gm}}\chi^{3/2} & (\Gamma^2-1=0)\\ \dfrac{\sqrt{2Gm\chi-(1-\Gamma^2)\chi^2}}{1-\Gamma^2}-\dfrac{2Gm}{(1-\Gamma^2)^{3/2}}\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{(1-\Gamma^2)\chi}{2Gm}} & (\Gamma^2-1<0)\end{cases} \tag{2.4.5}$$

ここで $t_0(r)$ は r ごとに決まる積分定数でいずれも $\chi=0$ となる時刻を $t=t_0(r)$ となるように定めている。今の場合、$\chi>0$ から $\chi=0$ へと収縮する解を考えているので、$t<t_0(r)$ である。

さて、$t\to t_0$ で $\chi\to 0$ の状況では、(2.4.4) 式の右辺の Γ^2-1 は相対的に無視できるようになるので、Γ^2 の値にはよらず

$$t_0(r)-t\approx\sqrt{\frac{2}{9Gm}}\chi^{3/2}\quad\Leftrightarrow\quad\chi(r,t)\approx\left(\frac{9Gm}{2}\right)^{1/3}(t_0(r)-t)^{2/3} \tag{2.4.6}$$

$$\frac{\partial\chi(r,t)}{\partial r}\approx\frac{\partial m}{\partial r}\left(\frac{G}{6}\right)^{1/3}(t_0(r)-t)^{2/3}+\frac{\partial t_0(r)}{\partial r}\left(\frac{4Gm}{3}\right)^{1/3}(t_0(r)-t)^{-1/3} \tag{2.4.7}$$

のように振る舞う。

これを (2.4.2) 式に用いれば、$\partial t_0(r)/\partial r \neq 0$ の場合、dr に対応する動径方向の距離は

$$d\ell = \frac{1}{\Gamma(r)}\frac{\partial\chi(r,t)}{\partial r}dr \approx \frac{1}{\Gamma(r)}\frac{\partial t_0(r)}{\partial r}\left(\frac{4Gm}{3}\right)^{1/3}(t_0(r)-t)^{-1/3}dr, \tag{2.4.8}$$

(2.3.24) 式より密度は

$$\rho(r,t) = \frac{m'}{4\pi\chi^2\chi'} \propto \frac{1}{t_0(r)-t} \tag{2.4.9}$$

のようにいずれも $t \to t_0$ で発散する。一方、体積要素は

$$dV_p = 4\pi\int\frac{\chi^2(r)}{\Gamma(r)}\frac{\partial\chi(r,t)}{\partial r}dr \approx \frac{12\pi Gm}{\Gamma(r)}\frac{\partial t_0(r)}{\partial r}(t_0(r)-t)dr \tag{2.4.10}$$

となるので、$t \to t_0$ で 0 に近づく。

しかし仮りに $\partial t_0(r)/\partial r = 0$ であれば (2.4.7) 式の第 2 項は消えるので $t \to t_0$ での振舞は

$$d\ell \propto (t_0(r)-t)^{2/3}, \qquad dV_p \propto (t_0(r)-t)^2, \qquad \rho \propto (t_0(r)-t)^{-2} \tag{2.4.11}$$

となる。

2.5 球対称定常時空とトールマン・オッペンハイマー・ボルコフ方程式

球対称定常時空を記述するには、(2.3.20)〜(2.3.24) 式で時間に依存する項を定数に置き換えれば良い。さらに $\chi(r,t)$ を r と選ぶのが便利である (2.1 節参照)。つまり、時間に依存しない球対称時空の計量として

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{2.5.1}$$

を採用する。この場合、(2.3.20) 式は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho+p}\left(1-2\frac{Gm}{r}\right)\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Gm}{r^2} + 4\pi Gpr = 0 \\ \Rightarrow \quad &-r^2\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{G(\rho+p)(m+4\pi pr^3)}{1-2Gm/r}, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

となる。これをトールマン・オッペンハイマー・ボルコフ (TOV) 方程式とよぶ。右辺の各項の比を考えると

$$\frac{p}{\rho} \approx \frac{c_s^2}{c^2}, \quad \frac{4\pi pr^3}{m} \approx \frac{3p}{\rho} \approx 3\frac{c_s^2}{c^2}, \quad \frac{2Gm}{r} \approx 4\times10^{-6}\left(\frac{m}{M_\odot}\right)\left(\frac{\chi_\odot}{r}\right) \tag{2.5.3}$$

なので、音速が光速よりも十分小さく、かつ、$r \gg 2Gm$ の場合には (2.5.2) 式は非相対論的流体の静水圧平衡の式

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{G\rho m}{r^2} \tag{2.5.4}$$

に帰着する。

TOV 方程式は ρ, p, m の 3 つの未知関数を持つから

$$m(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho dx \tag{2.5.5}$$

と状態方程式 $p = p(\rho)$ とを連立させれば解くことができる。(2.5.5) 式は、境界条件として中心に特異点がない ($r = 0$ で $m = 0$) ことを仮定している。

TOV 方程式の標準的な解き方は以下の通りである。

(i) 中心密度を与える: 中心密度 $\rho(0)$ から出発して、内側から外側へ (2.5.2) 式と (2.5.5) 式を連立して解いていく。

(ii) 天体の表面の定義: (2.5.2) 式より、圧力は r に関して単調減少関数であることがわかる。$p = 0$ となる $r = R_\mathrm{s}$ を天体の表面と定義し、そこで計算をやめる。このとき、$m_\mathrm{s} \equiv m(R_\mathrm{s})$ が天体の全質量となる。

(iii) 計量の rr 成分: (2.3.14) 式より、

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - 2Gm/r} \tag{2.5.6}$$

で与えられる。

(iv) 計量の tt 成分: (2.3.23) 式に (2.5.2) 式を代入すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{\rho + p}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{G(m + 4\pi p r^3)}{r^2 - 2Gmr}. \tag{2.5.7}$$

この方程式を $r \to \infty$ でミンコフスキー時空に漸近する ($e^\phi = 1$) という境界条件のもとで積分すると

$$\phi(r) = \int_\infty^r \frac{G(m + 4\pi p x^3)}{x^2 - 2Gmx} dx \qquad e^{2\phi} = \exp\left[-\int_r^\infty \frac{2G(m + 4\pi p x^3)}{x^2 - 2Gmx} dx\right] \tag{2.5.8}$$

となる。

天体が有限の半径 r_s を持つ場合を考えてみよう。$r > r_\mathrm{s}$ では $p = 0$ なので、(2.5.8) 式を

$$\begin{aligned} 2\phi(r) &= \int_\infty^r \frac{2Gm_\mathrm{s}}{x(x - 2Gm_\mathrm{s})} dx = \int_\infty^r \left(\frac{1}{x - 2Gm_\mathrm{s}} - \frac{1}{x}\right) = \ln \frac{x - 2Gm_\mathrm{s}}{x}\bigg|_\infty^r \\ &= \ln\left(1 - \frac{2Gm_\mathrm{s}}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{2\phi} = 1 - \frac{2Gm_\mathrm{s}}{r} \quad (r > r_\mathrm{s}) \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

となり、シュワルツシルド解に一致する。一方、$r < r_{\rm s}$ の場合、(2.5.8) 式は

$$
\begin{aligned}
e^{2\phi} &= \exp\left[-\int_{r_{\rm s}}^{\infty}\frac{2Gm_{\rm s}}{x(x-2Gm_{\rm s})}dx - \int_{r}^{r_{\rm s}}\frac{2G(m+4\pi px^3)}{x^2-2Gmx}dx\right]\\
&= \left(1-\frac{2Gm_{\rm s}}{r_{\rm s}}\right)\exp\left[-\int_{r}^{r_{\rm s}}\frac{2G(m+4\pi px^3)}{x^2-2Gmx}dx\right]\\
&= \left(1-\frac{2Gm_{\rm s}}{r_{\rm s}}\right)\exp\left[-2\int_{0}^{p}\frac{dp}{\rho+p}\right]
\end{aligned}
\tag{2.5.10}
$$

とも書ける。最後の変形には (2.5.7) 式を用いた。

2.6 シュワルツシルド解

トールマン・オッペンハイマー・ボルコフ (TOV) 方程式:

$$
-r^2\frac{dp}{dr} = \frac{G(\rho+p)(m+4\pi pr^3)}{1-2Gm/r}
\tag{2.6.1}
$$

の一様密度解：

$$
\rho(r) = \rho_0
\tag{2.6.2}
$$

を具体的に計算してみよう。

質量 m は

$$
m(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3
\tag{2.6.3}
$$

なので、(2.6.1) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
& -r^2\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi G(\rho_0+p)(\rho_0 r^3/3+pr^3)}{1-8\pi G\rho_0 r^2/3}\\
\Rightarrow\quad & -\frac{1}{(p+\rho_0)(p+\rho_0/3)}\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi Gr}{1-8\pi G\rho_0 r^2/3} = -\frac{12\pi Gr}{8\pi G\rho_0}\frac{1}{r^2-1/\kappa_0^2}\\
\Rightarrow\quad & \left(\frac{1}{p+\rho_0}-\frac{1}{p+\rho_0/3}\right)\frac{3}{2\rho_0}\frac{dp}{dr} = -\frac{3}{4\rho_0}\left(\frac{1}{r-1/\kappa_0}+\frac{1}{r+1/\kappa_0}\right)\\
\Rightarrow\quad & \frac{p+\rho_0}{p+\rho_0/3} \propto \sqrt{\left|\frac{1}{r^2-1/\kappa_0^2}\right|}.
\end{aligned}
\tag{2.6.4}
$$

ただし、$\kappa_0 \equiv \sqrt{8\pi G\rho_0/3}$ と定義した。

2.6.1 シュワルツシルドの内部解

$r = R_{\rm s}$ で $p = 0$ を境界条件として採用することで積分定数が決まる。まず $r < R_{\rm s}$ での $p(r)$ の表式を求めてみよう。(2.6.4) 式の左辺は $p = 0$ で 3 となるから、

$$
\frac{p+\rho_0}{p+\rho_0/3} = 1+\frac{2\rho_0}{3}\frac{1}{p+\rho_0/3} = 3\sqrt{\frac{1-\kappa_0^2 R_{\rm s}^2}{1-\kappa_0^2 r^2}} \qquad (r < R_{\rm s}).
\tag{2.6.5}
$$

これを p について解き直し、$M_\mathrm{s} \equiv 4\pi\rho_0 R_\mathrm{s}^3/3$ を用いてさらに変形すると

$$\begin{aligned}
p+\rho_0/3 &= \frac{2\rho_0}{3}\left(3\sqrt{\frac{1-\kappa_0^2R_\mathrm{s}^2}{1-\kappa_0^2r^2}}-1\right)^{-1} = \frac{2\rho_0}{3}\frac{\sqrt{1-\kappa_0^2r^2}}{3\sqrt{1-\kappa_0^2R_\mathrm{s}^2}-\sqrt{1-\kappa_0^2r^2}} \\
\Rightarrow \qquad p(r) &= \rho_0\frac{\sqrt{1-\kappa_0^2r^2}-\sqrt{1-\kappa_0^2R_\mathrm{s}^2}}{3\sqrt{1-\kappa_0^2R_\mathrm{s}^2}-\sqrt{1-\kappa_0^2r^2}} \\
&= \frac{3M_\mathrm{s}}{4\pi R_\mathrm{s}^3}\frac{\sqrt{1-2GM_\mathrm{s}r^2/R_\mathrm{s}^3}-\sqrt{1-2GM_\mathrm{s}/R_\mathrm{s}}}{3\sqrt{1-2GM_\mathrm{s}/R_\mathrm{s}}-\sqrt{1-2GM_\mathrm{s}r^2/R_\mathrm{s}^3}}
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

(2.5.1) 式に対する計量は

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1-2Gm/r} \qquad e^{2\phi} = \exp\left[-\int_r^\infty \frac{2G(m+4\pi px^3)}{x^2-2Gmx}dx\right] \tag{2.6.7}$$

で与えられる。$r > R_\mathrm{s}$ で真空 ($p=0,\ \rho=0$) となるように境界条件を選び、この計量を具体的に計算すれば一様密度球に対するシュワルツシルド解が得られる。

$m=m(r)$ を代入して

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1-2Gm/r} = \frac{1}{1-8\pi G\rho_0 r^2/3} = \frac{1}{1-2GM_\mathrm{s}r^2/R_\mathrm{s}^3}. \tag{2.6.8}$$

また

$$\begin{aligned}
-\phi &= \int_r^\infty \frac{G(m+4\pi px^3)}{x^2-2Gmx}dx \\
&= \int_{R_\mathrm{s}}^\infty \frac{GM_\mathrm{s}}{x^2-2GM_\mathrm{s}x}dx + \int_r^{R_\mathrm{s}} \frac{4\pi Gx^3(p+\rho_0/3)}{x^2-\kappa_0^2x^4}dx.
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

まず右辺第 1 項は

$$\frac{1}{2}\int_{R_\mathrm{s}}^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2GM_\mathrm{s}}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{x-2GM_\mathrm{s}}\bigg|_{R_\mathrm{s}}^\infty = -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}\right). \tag{2.6.10}$$

一方、$a \equiv \sqrt{1-\kappa_0^2R_\mathrm{s}^2}$, $u(x) \equiv \sqrt{1-\kappa_0^2x^2}$ とおいて第 2 項を変形すると

$$\begin{aligned}
&\int_r^{R_\mathrm{s}} \frac{4\pi Gx}{1-\kappa_0^2x^2}\frac{2\rho_0}{3}\frac{\sqrt{1-\kappa_0^2x^2}}{3\sqrt{1-\kappa_0^2R_\mathrm{s}^2}-\sqrt{1-\kappa_0^2x^2}}dx \\
&= \int_r^{R_\mathrm{s}} \frac{\kappa_0^2x}{1-\kappa_0^2x^2}\frac{\sqrt{1-\kappa_0^2x^2}}{3\sqrt{1-\kappa_0^2R_\mathrm{s}^2}-\sqrt{1-\kappa_0^2x^2}}dx = -\int_{u(r)}^a \frac{du}{3a-u} \\
&= -\ln\frac{3a-u(r)}{2a}.
\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

したがって

$$\begin{aligned}
2\phi &= 2\ln a + 2\ln[3a-u(r)] - 2\ln(2a) = 2\ln\frac{3a-u(r)}{2} \\
\Rightarrow \quad e^{2\phi} &= \frac{1}{4}\left(3\sqrt{1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}}-\sqrt{1-\frac{2GM_\mathrm{s}r^2}{R_\mathrm{s}^3}}\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

これらをまとめれば、$r < R_\mathrm{s}$ でのシュワルツシルドの内部解の計量：

$$ds^2 = -\frac{1}{4}\left(3\sqrt{1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}} - \sqrt{1-\frac{2GM_\mathrm{s}r^2}{R_\mathrm{s}^3}}\right)^2 dt^2 + \left(1-\frac{2GM_\mathrm{s}r^2}{R_\mathrm{s}^3}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{2.6.13}$$

を得る。

2.6.2 シュワルツシルドの外部解

一方、 $r > R_\mathrm{s}$ では $p = 0$, $\rho_0 = 0$, $m = M_\mathrm{s}$ であるから

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1-2GM_\mathrm{s}/r} \tag{2.6.14}$$

また

$$-\phi = \int_r^\infty \frac{G(m+4\pi p x^3)}{x^2-2Gmx}dx = \int_r^\infty \frac{GM_\mathrm{s}}{x^2-2GM_\mathrm{s}x}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{r}\right). \tag{2.6.15}$$

これらをまとめれば、$r > R_\mathrm{s}$ での計量：

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{2.6.16}$$

を得る。 これをシュワルツシルドの内部解と区別してシュワルツシルドの外部解と呼ぶことがある。また、この計量の値が発散する $r = R_\mathrm{Sch}$:

$$R_\mathrm{Sch} \equiv 2GM_\mathrm{s}\left(=\frac{2GM_\mathrm{s}}{c^2}\right) \tag{2.6.17}$$

はシュワルツシルド半径と呼ばれる。

2.6.3 シュワルツシルド解の適用限界

$r < R_\mathrm{s}$ の場合、(2.6.6) 式より、圧力が正となるためには

$$1-\frac{2GM_\mathrm{s}r^2}{R_\mathrm{s}^3} > 1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}} > 0, \tag{2.6.18}$$

$$3\sqrt{1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}} - \sqrt{1-\frac{2GM_\mathrm{s}r^2}{R_\mathrm{s}^3}} > 3\sqrt{1-\frac{2GM_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}} - 1 > 0 \tag{2.6.19}$$

という条件が必要である。(2.6.18) 式は

$$R_\mathrm{s} > R_\mathrm{Sch} = \frac{2GM_\mathrm{s}}{c^2}, \tag{2.6.20}$$

(2.6.19) 式は

$$\frac{2GM_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}} < \frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{s} > \frac{9}{8}R_\mathrm{Sch} \tag{2.6.21}$$

であるから、後者が成り立てばよい。逆に言えば、

$$R_\mathrm{s} < \frac{9}{8}R_\mathrm{Sch} = \frac{9}{8}\frac{8\pi G}{3}\rho_0 R_\mathrm{s}^3 \quad \Leftrightarrow \quad R_\mathrm{s} > \frac{c}{\sqrt{3\pi G\rho_0}} \tag{2.6.22}$$

の場合には、圧力で重力を支える平衡状態を実現できないことになる。つまり、必然的に力学的収縮するしかなくなるわけだ。

この式の右辺はもう少し物理的に解釈することができる。ニュートン力学的に考えて半径 r 内にある質量 $M(r) = 4\pi\rho_0 r^3/3$ の重力のもとで運動する粒子を考える。

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 r \tag{2.6.23}$$

より、この粒子の力学的時間スケール τ_dyn は r には依存せず

$$\tau_\mathrm{dyn} \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho_0}} \tag{2.6.24}$$

で与えられる。したがって数係数の違いを無視すれば、(2.6.22) 式は、球の表面の半径 R_s が球の力学的時間スケールで光が伝搬できる長さ以上であることを示す。つまりこの条件が満たされていると、R_s の領域がいったん重力収縮を開始すると、因果的に球内部の圧力を上昇させることで重力収縮をとめることは不可能なのである。

2.6.4 シュワルツシルド計量の動径座標の意味: 曲がった空間

シュワルツシルド計量：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_\mathrm{Sch}}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - R_\mathrm{Sch}/r} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{2.6.25}$$

において、動径座標 r は原点を中心として $4\pi r^2$ の表面積をもつ (あるいは大円の周の長さが $2\pi r$ となる) 球面を特徴づけるパラメータ (あるいはラベルと言っても良い) の意味で用いられている。

シュワルツシルド計量の場合に、上述の意味を具体的に考えてみよう。動径座標 r と $r+\Delta r$ の 2 つの球面間の動径方向の距離を $\Delta\ell$ とする。$\Delta r \ll r$ とすれば、(2.6.25) 式の動径方向の線素が実距離であることより

$$\Delta\ell = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - r_\mathrm{s}/r}} > \Delta r. \tag{2.6.26}$$

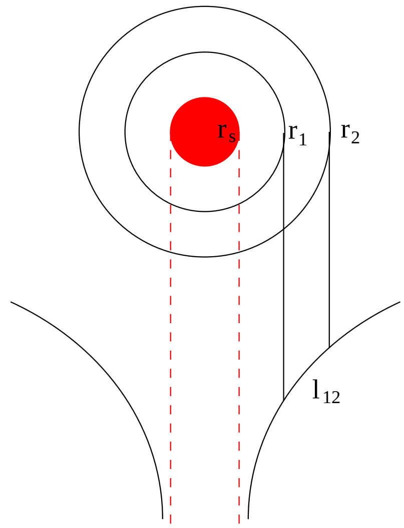

図 2.1: シュワルツシルド計量の歪みの概念図

この式を用いて $r_2 > r_1 \geq r_{\rm s}$ としたとき、r_1 に対応する球面と r_2 に対応する球面の間の動径方向の距離 ℓ_{12} を求めてみる。$x \equiv r_{\rm s}/r$ と置くと

$$\ell_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-r_{\rm s}/r}} = r_{\rm s} \int_{r_{\rm s}/r_2}^{r_{\rm s}/r_1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x}}. \tag{2.6.27}$$

ここで、積分公式：

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x}} = -\frac{\sqrt{1-x}}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right) \tag{2.6.28}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
\ell_{12} &= r_{\rm s}\left[-\frac{\sqrt{1-x}}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)\right]_{r_{\rm s}/r_2}^{r_{\rm s}/r_1} \\
&= r_2\sqrt{1-r_{\rm s}/r_2} - r_1\sqrt{1-r_{\rm s}/r_1} + \frac{r_{\rm s}}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-r_{\rm s}/r_1}}{1+\sqrt{1-r_{\rm s}/r_1}}\frac{1+\sqrt{1-r_{\rm s}/r_2}}{1-\sqrt{1-r_{\rm s}/r_2}}\right) \\
&= r_2\sqrt{1-r_{\rm s}/r_2} - r_1\sqrt{1-r_{\rm s}/r_1} + r_{\rm s}\ln\frac{\sqrt{r_2}+\sqrt{r_2-r_{\rm s}}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_1-r_{\rm s}}}.
\end{aligned} \tag{2.6.29}$$

特に $r_2 > r_1 \gg r_{\rm s}$ の場合を考えると

$$\ell_{12} \approx r_2 - r_1 + \frac{r_{\rm s}}{2}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{2.6.30}$$

となり、確かに $\ell_{12} > r_2 - r_1$ となっていることがわかる。また、$r_1 = r_{\rm s}$ の場合でも ℓ_{12} は発散せず、有限の値

$$\ell_{12} = r_2\sqrt{1-r_{\rm s}/r_2} + r_{\rm s}\ln(\sqrt{r_2/r_{\rm s}} + \sqrt{r_2/r_{\rm s}-1}) \tag{2.6.31}$$

にとどまることを注意しておこう。

2.7 重力質量と固有質量

さてここまでの議論では、(2.5.5) 式で定義された量

$$m(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x) dx \tag{2.7.1}$$

をあたりまえのように「質量」の定義とみなしてきた。しかし、(2.5.1) 式の計量に対する 3 次元空間部分の固有体積要素は $r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ ではなく、

$$\begin{aligned} & d^3 r_p = \sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} dr d\theta d\varphi = r^2 e^{\lambda} \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ \Rightarrow \quad & dV_p = dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} = 4\pi r^2 e^{\lambda} dr \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

となる。球対称の場合、全空間で積分する際には $d^3 r_p$ を角度平均した dV_p を固有体積要素として用いれば良い。したがって、

$$M_p(r) = \int_0^r \rho dV_p = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x) e^{\lambda} dx = \int_0^r \frac{4\pi x^2 \rho(x)}{\sqrt{1 - 2Gm/x}} dx \tag{2.7.3}$$

を、この系の「質量」と定義する方が自然に思われる。

エネルギー密度 ρ を、物体の静止質量密度の項 $\rho_{\rm m}$ と、それ以外の運動エネルギーあるいは相互作用エネルギーなどの寄与の項 $\rho_{\rm I}$:

$$\rho = \rho_{\rm m} + \rho_{\rm I} \tag{2.7.4}$$

に分離したとすれば、

$$m(r) = \int_0^r (\rho_{\rm m} + \rho_{\rm I}) \sqrt{1 - \frac{2Gm}{x}} dV_p. \tag{2.7.5}$$

ニュートン理論では $2Gm/x \ll 1$, $\rho_{\rm I} \ll \rho_{\rm m}$ であるから、

$$\begin{aligned} m(r) &= \int_0^r (\rho_{\rm m} + \rho_{\rm I}) \sqrt{1 - \frac{2Gm}{x}} dV_p \approx \int_0^r (\rho_{\rm m} + \rho_{\rm I}) \left(1 - \frac{Gm}{x}\right) dV_p \\ &\approx \underbrace{\int_0^r \rho_{\rm m} dV_p}_{=M_{\rm m}} + \underbrace{\int_0^r \rho_{\rm I} dV_p}_{=U_{\rm I}} - \underbrace{\int_0^r \frac{Gm\rho_{\rm m}}{x} dV_p}_{=U_{\rm G}}. \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

同様にすれば、$M_p \approx M_{\rm m} + U_{\rm I}$ であるから、一般的には

$$M_p > M_{\rm m} > m \tag{2.7.7}$$

という関係が予想される[5]。M_p と $M_{\rm m}$ の差が 相互作用のエネルギーの寄与、$M_{\rm m}$ と m の差が重力エネルギーの寄与である。このため、M_p を固有質量、m を重力質量とよんで区別することがある。

[5]ただし、重力がかなり強くなると $M_p > m > M_{\rm m}$ という場合も出てくる。これは重力が内部エネルギー $U_{\rm I}$ に大きな寄与をするようになるからである。

2.8 球対称真空解とバーコフの定理

すでに 2.1 節で述べたように、球対称時空の線素は一般に (2.1.4) 式、すなわち

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{2.8.1}$$

と置くことができる。特に物質が存在しない場合 (真空) には、時間に依存した時空を考えたとしても物質の静止系という概念にはもはや意味がない。つまり (2.1.6) 式のように $\chi(r,t)$ と r を区別する理由はなくなり、$\chi = r$ とした (2.8.1) 式を用いてよいことは自明である。

この場合、$\dot{\chi} = \ddot{\chi} = \chi'' = 0,\ \chi' = 1$ が成り立つ。これらをまず (2.1.12) 式に代入すると

$$\frac{e^{-2\phi}}{r}\dot{\lambda} = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\lambda} = 0 \tag{2.8.2}$$

となる。この結果も合わせて、(2.1.11) 式、(2.1.13) 式、および (2.1.14) 式に代入すると

$$\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right)e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = 0 \tag{2.8.3}$$

$$\left(\frac{2\phi'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = 0 \tag{2.8.4}$$

$$\left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \frac{\phi'}{r} - \frac{\lambda'}{r}\right)e^{-2\lambda} = 0 \tag{2.8.5}$$

が得られる。この方程式系には時間微分が含まれていないことからもわかるように、球対称真空時空は必ず静的 (計量が時間に依存しない) となる。ある半径以内に物質が存在している場合であっても、上述の方程式はその半径以上の領域では同様に成立することに注意してほしい。

(2.8.3) 式〜(2.8.5) 式は球対称定常時空であるから、それを解いた結果は 2.6.2 節で求めたシュワルツシルドの外部解に一致するはずだ。実際にこのことは以下のようにして示される。

まず (2.8.3) 式と (2.8.4) 式より

$$\lambda' + \phi' = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda + \phi = C_1(= \text{定数}) \tag{2.8.6}$$

となる。ここで $r \to \infty$ でミンコフスキー時空に漸近するという境界条件を選べば $C_1 = 0$ となる。また (2.8.3) 式より

$$(1 - 2r\lambda')e^{-2\lambda} = \frac{d}{dr}(re^{-2\lambda}) = 1 \quad\Rightarrow\quad e^{-2\lambda} = 1 + \frac{C_2}{r} \tag{2.8.7}$$

が成り立つ。ここで C_2 は積分定数であるが、2.6.2 節の議論より、遠方から見たときに中心領域にある質量 $M_{\rm s}$ を用いて $C_2 = -2GM_{\rm s}$ と置くことができる。さらに (2.8.7) 式の最初の表式を再度 r について微分すれば

$$(-2\lambda' + 2r\lambda'^2 - \lambda'')e^{-2\lambda} = 0 \tag{2.8.8}$$

が得られるが、これは (2.8.5) 式において $\phi = -\lambda$ とした結果と一致する。

以上より、(2.8.3) 式〜(2.8.5) 式の解は (2.6.16) 式:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM_\mathrm{s}}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \qquad (2.8.9)$$

で与えられることが示された。このように球対称分布にしたがう物質が運動をしていたとしても、その外側の真空時空はシュワルツシルドの外部解となる。この結果はバーコフ (Birkhoff) の定理と呼ばれている。

2.9 一様等方宇宙モデル: フリードマン・ロバートソン・ウォーカー解

2.9.1 宇宙原理とロバートソン・ウォーカー計量

宇宙のあらゆる点は何ら特殊な位置を占めておらず、完全に平等であるという「宇宙原理」を認めると、その計量を

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &\Downarrow \ \text{宇宙原理にしたがって任意の点のまわりで球対称} \\ ds^2 &= g_{tt}(t,r)dt^2 + g_{rr}(t,r)dr^2 + g_{\theta\theta}(t,r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \end{aligned} \qquad (2.9.1)$$

と選ぶことができる。さらに、一様等方性を要請すれば、この計量を

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left[W(x)dx^2 + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \qquad (2.9.2)$$

の形にできることもすぐわかる。計量が時間と空間の関数として変数分離した形でないと、時間がたつと場所ごとの計量の違いを生み出してしまうからである。

$g_{tt} = -1$ と選ぶことはこの座標系に対して相対的に静止している (共に動いているという意味で、共動系といわれる) 観測者の固有時間を座標時間と選ぶことに対応している。実は、任意の時空に対して

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j \qquad (2.9.3)$$

という形の計量をもつような座標系を設定することは常に可能である（同期化された座標系； 例えば、ランダウ・リフシッツ「場の古典論」 §97 参照)。

さて一般の球対称時空の計量:

$$ds^2 = -e^{2\phi(x,t)}dt^2 + e^{2\lambda(x,t)}dx^2 + \chi^2(x,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \qquad (2.9.4)$$

に対するリッチスカラー R が

$$\begin{aligned} R = 2&\left(\ddot\lambda + \dot\lambda^2 - \dot\phi\dot\lambda - \frac{2\dot\chi\dot\phi}{\chi} + \frac{2\ddot\chi}{\chi} + \frac{2\dot\chi\dot\lambda}{\chi} + \frac{\dot\chi^2}{\chi^2}\right)e^{-2\phi} \\ &+ 2\left(-\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \frac{2\chi''}{\chi} - \frac{2\chi'\phi'}{\chi} - \frac{\chi'^2}{\chi^2}\right)e^{-2\lambda} + \frac{2}{\chi^2}. \end{aligned} \qquad (2.9.5)$$

となることはすでに計算ずみである。(2.9.2) 式の計量に対しては

$$\phi(x,t) \equiv 0, \qquad \lambda(x,t) = \ln a(t) + \frac{1}{2}\ln W(x) \qquad \chi(x,t) = a(t)x \tag{2.9.6}$$

であるから、(2.9.5) 式は

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left[\frac{2W'}{xW^2} + \frac{2}{x^2}\left(1 - \frac{1}{W}\right)\right] \tag{2.9.7}$$

となる。一様等方という仮定のもとでは、最後の項が場所の関数であっては困るので、

$$\frac{2W'}{xW^2} + \frac{2}{x^2}\left(1 - \frac{1}{W}\right) \equiv 6K \qquad (K \text{ は定数}) \tag{2.9.8}$$

とおいて $W(x)$ を求めると、

$$W(x) = \frac{1}{1 - Kx^2} \tag{2.9.9}$$

となる。したがって、一様等方宇宙モデルは、ロバートソン・ウォーカー (Robertson – Walker) 計量：

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dx^2}{1 - Kx^2} + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right], \tag{2.9.10}$$

で記述されることになる。

2.9.2 アインシュタイン方程式からフリードマン方程式へ

空間の一様等方性の仮定のもとでは、それに対応して物質場のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は完全流体の形：

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu} \tag{2.9.11}$$

しか許されないことが示される[6]。

そこで具体的に (2.3.1) 式〜(2.3.4) 式に

$$\phi(x,t) \equiv 0, \qquad \lambda(x,t) = \ln a(t) - \frac{1}{2}\ln(1 - Kx^2) \qquad \chi(x,t) = a(t)x \tag{2.9.12}$$

を代入してみると

$$-8\pi G\rho a^2x^2 + \Lambda a^2x^2 = -3\dot{a}^2x^2 - 3Kx^2 \tag{2.9.13}$$

$$0 = \frac{\dot{a}}{a}a - \dot{a} \tag{2.9.14}$$

$$8\pi Gpa^2x^2 + \Lambda a^2x^2 = -Kx^2 - 2a\ddot{a}x^2 - \dot{a}^2x^2 \tag{2.9.15}$$

$$8\pi Gp\chi^2 + \Lambda a^2x^2 = -2a\ddot{a}x^2 - \dot{a}^2x^2 - Kx^2 \tag{2.9.16}$$

[6]『入門』問題 [6.6] 参照。

となる。ただしここでは宇宙定数を含むアインシュタイン方程式:

$$G^{\alpha}{}_{\beta} + \Lambda \delta^{\alpha}{}_{\beta} = 8\pi G\, T^{\alpha}{}_{\beta} \tag{2.9.17}$$

を採用したため、(2.9.13) 式〜(2.9.16) 式の左辺に Λ に起因する項を付け加えた。

(2.9.13) 式と (2.9.15) 式を組み合わせて次の 2 つの独立な式:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.9.18}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \tag{2.9.19}$$

を得る。

特に、(2.9.18) 式は、宇宙膨張を記述するフリードマン方程式と呼ばれている。また、(2.9.19) 式を書き換えると

$$\ddot{a} = -\frac{G}{a^2} \underbrace{\frac{4\pi}{3}\left(\rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi G}\right) a^3}_{\text{半径 } a \text{ の一様密度球の質量}}. \tag{2.9.20}$$

ところで、(2.9.18) 式と (2.9.19) 式を少しにらめば、

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \qquad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{2.9.21}$$

と定義し、$\rho \to \rho + \rho_\Lambda$、$p \to p + p_\Lambda$ と置き換えてやることで、Λ の寄与はすべて吸収できる。

ところで、(2.9.18) 式を時間に関して微分すると、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + 2\rho\right) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.9.22}$$

これと (2.9.19) 式を等置すると、

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \tag{2.9.23}$$

2.9.3 宇宙の状態方程式とダークエネルギー

状態方程式は考えている物質の性質に依ってはいくらでも複雑になり得るが、代表的なものとして以下の 4 つをあげておこう。

(i) 非相対論的物質 (matter): $p \ll \rho$

(ii) 相対論的物質 (radiation): $p = \rho/3$

(iii) 宇宙定数 (cosmological constant): $p = -\rho$

(iv) ダークエネルギー (dark energy): $p = w\rho$